



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

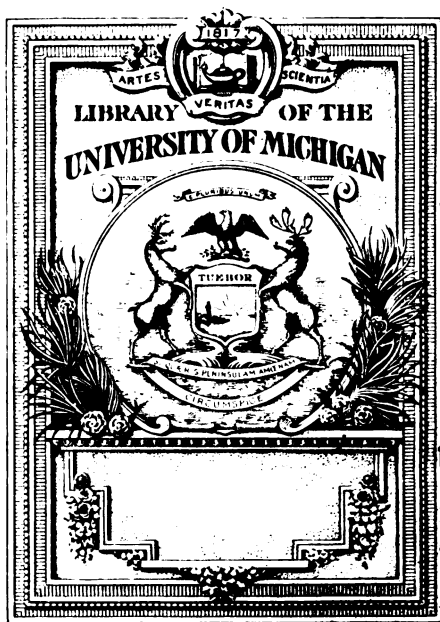
Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

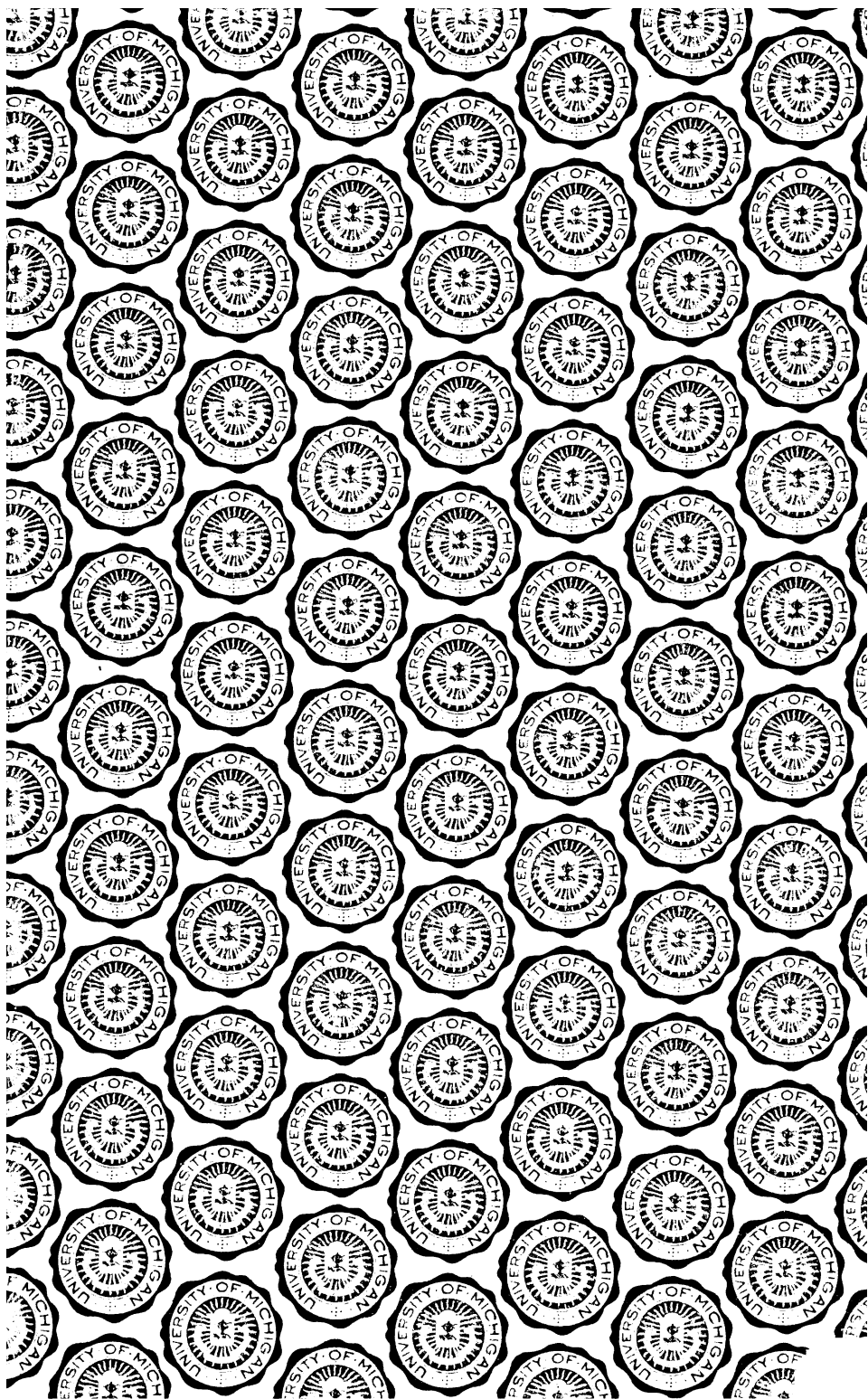
Nous vous demandons également de:

- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>







QA

35

.526

1778



C O U R S
D E
MATHÉMATIQUES.

T O M E II.

QA

35

52.6

1778

COURS COMPLET
D E
MATHÉMATIQUES,

PAR M. L'ABBÉ SAURI,
*ANCIEN PROFESSEUR DE PHILOSOPHIE
EN L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER.*

  
TOME SECOND.
  

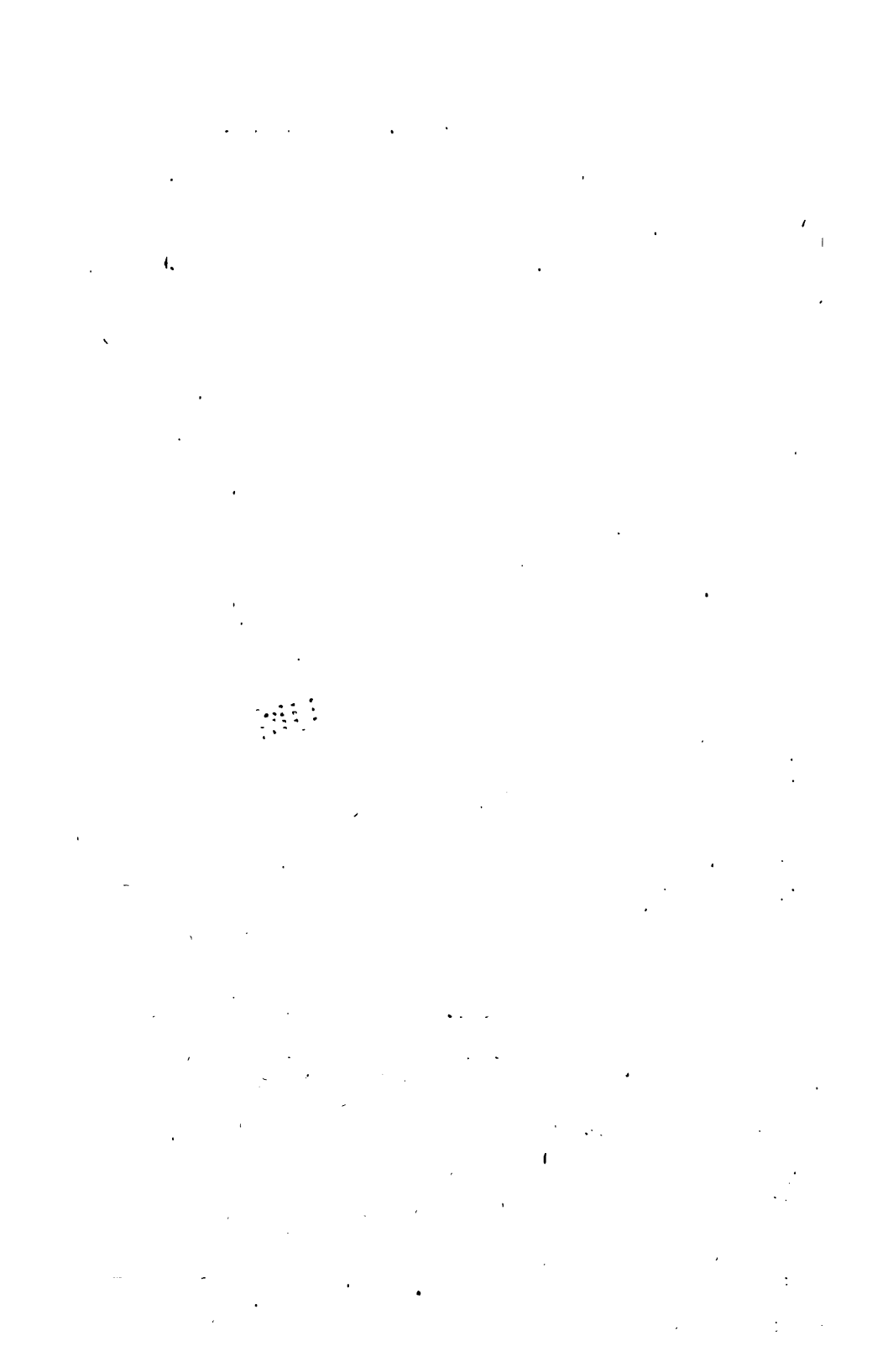


A P A R I S ,

Chez JEAN-FRANÇOIS BASTIEN, Libraire, rue du
Petit-Lion, Fauxbourg Saint-Germain,

M. DCC. LXXVIII,

Avec Approbation & Privilège du Roi.



Hist. 7 Scs
to andalusi
7-27-27
15430



COURS COMPLET DE MATHÉMATIQUES.

PREMIERE PARTIE.

GÉOMÉTRIE SUBLIME, OU GÉOMÉTRIE DES COURBES.

LA Géométrie Sublime forme une science aussi vaste qu'intéressante. Les Courbes les plus célèbres, & les plus utiles dans les sciences Physico-Mathématiques, sont celles qu'on appelle *Sections Coniques*, & sur lesquelles les anciens Géomètres ont beaucoup travaillé. Nous commencerons par développer leurs propriétés les plus essentielles, nous réservant de parler dans la suite des *Courbes géométriques* d'un ordre plus élevé; de celles qu'on nomme *transcendantes*, & des *Courbes à double courbure*.

H.C.M.

Tome II.

A

7 20-29 N.G.S.

DES SECTIONS CONIQUES.

DÉFINITIONS.

1. **N**ous appellerons *Sections Coniques* les Courbes qu'on peut former sur la surface d'un cône, en coupant ce cône par des plans. Nous allons considérer ces lignes sur un plan ; nous ferons voir ensuite qu'elles sont les mêmes qu'on trouve dans le cône.

La *Parabole* (figure 1.) est une Courbe, dont chaque point m est également éloigné d'un point fixe F qu'on appelle *Foyer*, & d'une ligne fd aussi fixe qu'on appelle la *Directrice*. La ligne fF perpendiculaire à la *Directrice* & qui passe par le *Foyer* F , s'appelle l'*Axe* de la *Parabole*. Une ligne dm parallèle à l'*Axe* s'appelle un *Diamètre*. On nomme *Tangente* une ligne tm qui touche la parabole sans la couper. Une ligne Pm perpendiculaire à l'*axe* & terminée à la parabole se nomme *Ordonnée*. La partie AP de l'*axe*, comprise entre l'*ordonnée* & le point A où l'*axe* rencontre la parabole, s'appelle *Abscisse* ou *Coupée*. La ligne mC perpendiculaire à la tangente au point m & terminée à l'*axe*, s'appelle la *Normale* ou la *Perpendiculaire*. La partie PC de l'*axe*, comprise entre l'*ordonnée* & la normale, s'appelle la *Sous-Normale*. La *Sous-Tangente* est la partie Pt de l'*axe*, comprise entre l'*ordonnée* & la rencontre de la tangente. La ligne no parallèle à la tangente mt , & terminée en o par le diamètre md , est dite *Ordonnée* ou *Appliquée* à ce diamètre. Une ligne quadruple de la distance du point A ou m (origine de l'*axe* ou du diamètre) à la directrice fd , s'ap-

pelle le *Parametre* de l'axe ou du diamètre. Enfin on nomme *Rayon Vecteur* une ligne Fm tirée du foyer à la courbe.

2. COROLLAIRE. *Puisque chaque point de la parabole est également éloigné du point F & de la Directrice*, l'on a $AF = Af$. Le point A est appelé le *Sommet* de la parabole.

3. THÉORÈME. *Le carré d'une ordonnée quelconque Pm est égal au produit de son abscisse AP par le parametre.* Soit $Pm = y$, $AP = x$, $Af = AF = a$, le parametre (1.) sera $= 4a$, ou, pour abréger, $= p$. La ligne $FP = AP - FA$ sera $= x - a$. Cela posé, le triangle rectangle FmP donne $Fm^2 = Pm^2 + FP^2$, ou algébriquement (en faisant attention que $Fm = md = AP + Af = x + a$) $\frac{x}{x+a} + \frac{a^2}{x+a} = y^2 + \frac{x-a}{x+a} a^2$, ou $y^2 = \frac{x}{x+a} + \frac{a^2}{x+a} - \frac{(x-a)^2}{x+a} = \frac{x^2 + 2ax + a^2 - x^2 + 2ax - a^2}{x+a} = \frac{4ax}{x+a} = px$; donc $y^2 = px$, ce qu'il falloit démontrer. Telle est l'équation de la parabole *.

4. COROLLAIRE I. *Donc les carrés des deux ordonnées y, y' sont entr'eux comme leurs abscisses x, x' .* Car par le théorème $y^2 = px$, & par la même raison $y'^2 = px'$; donc $y^2 : y'^2 :: px : px' :: x : x'$.

5. COROLLAIRE II. *Puisque $y^2 = px$; donc $p : y :: y : x$, c'est-à-dire que l'ordonnée est moyenne proportionnelle entre le parametre & l'abscisse.*

6. COROLLAIRE III. *Puisque $y^2 = px$, on a*

* Si le point P étoit situé au-dessus du point F , la ligne FP seroit $= a - x$; or $\frac{x}{x-a} + \frac{a^2}{x-a} = \frac{x^2 + 2ax + a^2}{x-a}$, donc l'équation seroit la même.

$y = \pm \sqrt{px}$; donc à chaque abscisse répondent deux ordonnées égales , l'une positive Pm , l'autre négative PM .

7. COROLLAIRE IV. *Il suit du dernier Corollaire que x augmentant , y augmente ; donc les branches de la parabole s'étendent à l'infini , en s'écartant toujours de l'axe. Si l'on suppose x négative , c'est-à-dire , si l'on prend des abscisses au-dessus de a sur le prolongement de l'axe , elles auront le signe — (étant prises dans un sens opposé aux positives) , & l'on aura $y^2 = -x \times p = -px$; donc $y = \pm \sqrt{-px}$, quantité imaginaire qui fait voir que la parabole n'a point de branches du côté des abscisses négatives.*

8. COROLLAIRE V. *Si l'on fait $x = a$, on aura $y^2 = pa = 4a \times a = 4a^2$, & $y = \sqrt{4a^2} = 2a = \frac{p}{2}$; donc l'ordonnée qui passeroit par le foyer de la parabole seroit la moitié du paramètre , & la double ordonnée seroit égale au paramètre entier.*

9. PROBLÈME. *Par un point donné m sur la parabole mener une tangente à cette courbe. Du point donné ayant tiré le rayon vecteur mF , & la perpendiculaire md à la directrice , joignez les deux points d & F par la ligne Fd . Menant mt par le point m & le point i milieu de Fd , le problème sera résolu. En effet mt coupant en deux parties égales la base dF du triangle isocèle $d m F$, & passant par le sommet de l'angle m , est nécessairement perpendiculaire à dF ; * mais de plus elle a un*

* Car cette ligne a deux points également éloignés de d & de F ; donc selon ce que nous avons dit dans la Géométrie , elle est perpendiculaire sur dF .

point m également éloigné de F & de d . Donc tous les autres points q sont également éloignés de F & de d ; mais si l'on tire les lignes q , q' perpendiculairement sur la directrice, on aura la perpendiculaire $q q'$ plus petite que l'oblique $q d$; donc les points q sont plus près de la directrice que du foyer ; donc ils n'appartiennent pas à la parabole, qui n'a d'autre point commun avec $t m$ que le seul point m ; donc cette ligne est tangente.

10. COROLLAIRE I. Puisque $m t$ divise en deux également la base $d F$ du triangle isocèle $d m F$, cette ligne divisera aussi en deux parties égales l'angle $d m F$, de manière que l'on aura $F m t = d m t = m t F$ (parce que ces deux derniers angles sont alternes internes entre les parallèles $d m$, $t F$) ; donc 1°. le triangle $t F m$ est isocèle, & $F t = F m$; donc 2°. l'angle $o m T = d m t$ (son opposé au sommet) $= F m t$; donc si dans la concavité d'un corps formé par la révolution d'une parabole autour de son axe, on reçoit des rayons de lumière parallèles à l'axe, ces rayons se réfléchiront tous au foyer, & réciproquement s'ils partent du foyer ils se réfléchiront parallèlement à l'axe, en faisant l'angle de réflexion égal à celui d'incidence *.

11. COROLLAIRE 2. Puisque nous venons de voir que le triangle $t F m$ est isocèle, la perpendiculaire $F i$ divise en deux également la base $t m$

* L'angle que le rayon $F m$ fait avec la tangente est complément de l'angle $C m F$; or l'angle que la tangente $m t$ fait avec la courbe, est évidemment infiniment petit ; donc l'angle que fait $F m$ avec la courbe est le même que celui qu'il fait avec la tangente $m t$.

de ce triangle ; donc une perpendiculaire abaissée du foyer sur la tangente de la parabole , la divise en parties égales.

12. THÉORÈME. La sous-normale PC est égale à la moitié du paramètre. Les triangles $d s F$, $m P C$ ont les angles en F & C égaux : car les lignes $m C$, $F d$ perpendiculaires sur $t m$ sont nécessairement parallèles ; ainsi les angles correspondants C & F sont égaux ; d'ailleurs les angles P & s sont droits , & les côtés $P m$, $s d$ égaux à cause du rectangle $d s P m$; donc ces triangles ont un côté égal de part & d'autre , & deux angles sur ce côté égaux ; ainsi ils sont égaux en tout , comme on l'a dit dans la Géométrie ; donc $s F = PC$; or $s F = 2 a = \frac{p}{2}$; donc , &c.

COROLLAIRE. Donc $\overline{m C}^2 = \overline{P m}^2 + \overline{P C}^2$ (propriété du triangle rectangle) , ou $\overline{m C}^2 = y^2 + \frac{p^2}{4} = p x + \frac{p^2}{4}$, à cause de $p x = y^2$ (3) ; donc la normale $m C = \sqrt{p x + \frac{p p}{4}}$.

COROLLAIRE II. Donc $AC = AP + PC = x + \frac{p}{2}$.

13. THÉORÈME. La sous-tangente $P t$ est double de l'abscisse AP , c'est-à-dire la sous-tangente $P t = 2 x$. Car par la propriété du triangle rectangle $C m t$ on a (Géom. 53) $PC : P m :: P m : P t$, ou $\frac{p}{2} = 2 a : y :: y : P t$; donc $P t = \frac{y^2}{2 a} = \frac{p x}{2 a} = \frac{4 a x}{2 a} = 2 x$.

COROLLAIRE I. Donc le triangle $m P t$ est égal

au parallélogramme $mPAN$; car le triangle & le parallélogramme ont même base mP , mais de plus la hauteur du triangle est double de celle du parallélogramme. Ces deux figures sont donc égales.

COROLLAIRE II. Pour mener une tangente par un point m de la parabole , ayant abaissé l'ordonnée mP , on fera $At = AP$, & par le point t & le point m menant tm , on aura la tangente demandée , puisque la sous-tangente sera $= 2 AP = 2 x$.

COROLLAIRE III. Donc $tm^2 = mP^2 + tP^2 = y^2 + 4x^2 = px + 4x^2$; donc la tangente $T = \sqrt{px + 4xx}$.

14. THÉORÈME. Le carré de la perpendiculaire Fi menée du foyer sur la tangente mt , est égale au produit du rayon vecteur Fm par le quart du paramètre. Car par le sommet A menant la perpendiculaire Ai sur l'axe , les triangles semblables tAi , tmP , donnent $tA : tP :: ti : tm$; or tA est la moitié de Pt (13) ; donc ti est la moitié de tm ; mais la perpendiculaire Fd rencontre aussi tm en i , puisque , à cause de l'angle $t = dmt$ (son alterne interne) $= tmF$ (10.) , Fd divise en parties égales la base du triangle isocèle tFm . Donc iA est une perpendiculaire abaissée du sommet i de l'angle droit du triangle rectangle Fit sur l'hypothénuse Ft ; donc (Géom. 55) $Ft : Fi :: Fi : FA$; donc $Ft \times FA = Fi^2$; or $Ft = Fm$ (10) ; donc $Fm \times FA = Fi^2$; donc , &c.

COROLLAIRE. Donc appelant r le rayon vecteur , t la perpendiculaire à la tangente , on aura $ra = t^2$; donc pour un autre point différent de m , on aura $r'a = T^2$; donc $ra : r'a :: t^2 :$

T^2 , ou $t^2 : T^2 :: r : r'$; donc $t : T :: \sqrt{r} : \sqrt{r'}$. C'est-à-dire que les perpendiculaires menées du foyer sur les tangentes de la parabole sont proportionnelles aux racines des rayons vecteurs correspondants. Cette proposition est utile dans l'Astronomie.

15. THÉORÈME. Le rayon vecteur $r = x + \frac{p}{4}$; car nous avons démontré (10) que $Fm = Pt$; mais $Ft = At + Af = x + a$ (puisque $tP = 2AP$); donc &c.

16. THÉORÈME. Le paramètre P d'un diamètre quelconque md est plus grand que le paramètre p de l'axe du quadruple de l'abscisse. Car $P = 4md = 4Ps$; or $Ps = AP + Af = x + a$; donc $P = 4x + 4a = 4x + p$.

COROLLAIRE I. Donc le paramètre de l'axe est le plus petit de tous les paramètres.

COROLLAIRE II. Donc le paramètre P d'un diamètre est une ligne troisième proportionnelle à l'abscisse & à la tangente qui répondent à l'origine m du diamètre : car cette tangente est $= \sqrt{px + 4x^2}$ (13.); or $x : \sqrt{px + 4x^2} :: \sqrt{px + 4x^2} : \frac{px + 4x^2}{x} = p + 4x = P$.

LEMME. Le triangle tob (fig. 2.) fait par une ordonnée au diamètre mo , la partie lb de l'ordonnée à l'axe, comprise entre la parabole & le diamètre, & la partie bo du diamètre, comprise entre la rencontre de son ordonnée & de l'ordonnée à l'axe, est égal au parallélogramme $motu$ formé par l'axe, le diamètre, la tangente & l'ordonnée au diamètre (fig. 2). Car $mP^2 : Tq^2 :: AP^2$

$Aq :: AP \times Pm :: Aq \times Pm :: PmnA ;$
 $qbnA$; mais les triangles mPt , luq sembla-
 bles , parce qu'ils ont leurs côtés parallèles , sont
 entre eux comme les quarrés de leurs côtés ho-
 mologues , ou comme $\overline{mP}^2 : \overline{lq}^2$; donc $mPt :$
 $lqu :: PmnA : qbnA$, ou (alternando) $mPt :$
 $mPnA :: luq : bqnA$; or $mPt = PmnA$
 (13) ; donc $lqu = qbnA$. Si de ces deux
 dernieres figures on retranche le Trapeze com-
 mun $bouq$, il restera $lob = uonA = uomt$;
 en ajoutant le triangle Ait & retranchant min
 $= Ait$ (puisque $At = AP = mn$, que les
 angles en n & A sont droits , & les angles en i
 égaux , étant opposés au sommet ; de maniere que ces
 triangles ont un côté égal , & les angles sur ce
 côté égaux de part & d'autre , ce qui les rend
 égaux en tout) ; donc , &c.

17. THEOREME. Le quarré d'une ordonnée lo
 $= y$, à un diametre mb , est égal au produit de
 l'abscisse mo (x') par le parametre P de ce dia-
 metre. Les triangles lbo , mPt semblables (à
 cause qu'ils ont leurs côtés parallèles) , donnent
 $\overline{lo}^2 : \overline{tm}^2 :: lob : mPt :: omtu : mnAP$
 (Lemme précédent.) ; or les parallélogrammes
 $omtu$, $mnAP$ étant compris entre mêmes pa-
 ralleles no , tu , ont même hauteur & sont entre
 eux comme leurs bases , $tu = om$ & AP ; donc
 $\overline{lo}^2 : \overline{tm}^2 :: mo : AP$, ou $y^2 : x' :: px +$
 $4x^3 : x$ (en alternant & substituant les valeurs
 algébriques) ; donc $y^2 = x' \times \frac{px + 4x^3}{x} = x' \times$
 $\frac{p + 4x}{1} = Px'$, à cause de $p + 4x = P$ (16.).

COROLLAIRE I. Dont pour une autre ordonnée Y

& son abscisse x'' ; on aura $Y^2 = P x''$; donc $y^2 : Y^2 :: P x' : P x'' :: x' : x''$; c'est-à-dire, que les quarrés des ordonnées à un diamètre sont entre eux comme les abscisses correspondantes.

COROLLAIRE II. De ce que $y^2 = P x'$, il suit : 1°. qu'on a $y = \pm \sqrt{P x}$; c'est-à-dire, qu'à chaque abscisse x' il répond deux ordonnées égales, l'une positive *ol*, l'autre négative *of*. 2°. Que l'équation aux diamètres est la même que l'équation à l'axe ; mais les ordonnées aux diamètres leur sont obliques , tandis que les ordonnées à l'axe lui sont perpendiculaires.

18. PROBLÈME. Décrire une parabole. De l'équation $p x = y^2$, on tire $x : y :: y : p$. Ainsi cherchant une moyenne proportionnelle y entre chaque abscisse AP & le paramètre p que je suppose connu, on élèvera cette moyenne proportionnelle Pm perpendiculairement à l'axe au point P , on prolongera chaque mP jusqu'à ce que $Pm' = Pm$, & faisant passer une courbe par tous les points m, m' , on aura la parabole cherchée : car on aura toujours $x : y :: y : p$, & $y^2 = p x$, équation à la parabole. On peut prendre p arbitrairement, par exemple, d'un ponce, d'un pied, &c.

Autre maniere par un mouvement continu. En se servant d'une équerre ffd ou $x d h$ (fig. 3.) : on attache sur un point quelconque x d'une des branches de cette équerre l'extrémité d'un fil d'une longueur égale à $x d$, & ayant attaché l'autre extrémité en f , on applique par le moyen d'un stilet m une partie du fil contre $x d$, & tenant le fil tendu, on fait glisser l'autre branche de l'équerre le long de la directrice fd , le stilet m trace dans ce mouvement la parabole am ; car on a toujours $fm = md$.

19. PROBLÈME. *Étant donnée une parabole a m, trouver le parametre p.* Cherchez une troisième proportionnelle à une abscisse ap , & à son ordonnée qp , vous aurez le parametre cherché ; car l'équation $y^2 = xp$ donne $x : y :: y : p$.

Autre maniere : ayant tiré la corde aq , menez par l'extrémité q de cette corde la perpendiculaire qc , la ligne pc sera le parametre demandé ; car par la propriété du triangle rectangle aqc , l'on a $pa : qp :: qp : pc$, ou $x : y :: y : p$, d'où l'on tire $y^2 = xp$, équation à la parabole.

20. PROBLÈME. *Trouver l'équation de la parabole par rapport à la convexité, ou relativement à une tangente An perpendiculaire à l'axe au point A (fig. 2.).* Soit $An = x$, $nm = y$. Par la propriété de la parabole $\overline{pm}^2 = \overline{An}^2 = p \times AP = p \times nm$, ou $x^2 = py$. Ainsi dans l'équation à l'axe il suffit de changer y en x , & réciproquement pour avoir l'équation de la parabole par rapport à sa convexité.

21. PROBLÈME. *Quarrer la demi-parabole acb (fig. 4.).* Par le point c , tirez la tangente ct , & menant les lignes pc , fd très-proches l'une de l'autre & parallèles à l'axe, menez par les points r & c les lignes cb , mnr perpendiculaires au même axe, considérant la portion rc de la courbe comme une partie infiniment petite de la tangente, les triangles semblables rcd , cbr donnent $bt : bc :: rd : dc$; mais $bt = 2ab = 2fd$, & $rd = mb$; donc $2fd : bc :: mb : dc$, & $2fd \times dc = bc \times mb$; donc le rectangle $mncb$ est double du rectangle extérieur $pfcd$; donc chaque élément de l'espace intérieur est double de son élément correspondant dans l'espace extérieur ;

donc, l'espace parabolique acb est double de l'espace extérieur apc : mais ces deux espaces pris ensemble sont égaux au parallélogramme $apcb$. Donc l'espace parabolique acb est les deux tiers du parallélogramme correspondant, & l'espace extérieur pac en est le tiers.

REMARQUE I. Nous avons supposé que l'élément de l'espace parabolique étoit égal au rectangle $m\hat{b}nc$, tandis qu'il est plus petit de la quantité nrc ; mais comme nr & cn sont des infiniment petits, le triangle enr produit de $\frac{cn}{2}$ par rn , fera un infiniment petit du second ordre, qu'on néglige devant l'infiniment petit du premier ordre $m\hat{b}rc$. Par la même raison nous avons pris $p\hat{f}cd$ pour l'élément de l'espace extérieur.

REMARQUE II. Dans toutes les Courbes, dont la sous-tangente aura un rapport constant avec l'abscisse, on pourra de même trouver le rapport de chaque élément $bmr\hat{d}$, ou $bmnc$ de l'espace intérieur à chaque élément correspondant de l'espace extérieur, & par conséquent trouver le rapport de l'espace intérieur à l'extérieur ; donc on pourra quarrer toutes les Courbes qui sont dans ce cas. Par quarrer, nous entendons ici trouver la surface.

Du Cercle de l'Ellipse & de l'Hyperbole.

22. PROBLÈME. Dans un cercle dont le diamètre $ab = 2a$ (fig. 5.), le carré y^2 d'une ordonnée quelconque pm est égal au rectangle des abscisses ap (x), pb ($2a - x$) : car (Géom. 53.) $ap : pm :: pm : pb$, ou $x : y :: y : 2a - x$; donc $y^2 = 2ax - x^2$. Telle est l'équation du

cercle, en comptant les abscisses depuis l'origine a du diamètre ; mais si l'on compte les abscisses depuis le centre c , en faisant $cp = x$, on aura $ap = ac - cp = a - x$, $bp = bc + cp = a + x$; donc $ap \times pb = y^2 = a^2 - x^2$, autre équation au cercle.

COROLLAIRE I. Donc $y = \pm \sqrt{a^2 - x^2}$; c'est-à-dire à chaque abscisse cp répondent deux ordonnées égales, l'une positive pm , l'autre négative pm' .

COROLLAIRE II. Si l'on fait $cp = ca$ ou cb , on aura $y = \pm \sqrt{aa - aa} = \pm \sqrt{0} = \pm 0$, & si l'on suppose x ou $-x$ (car le carré de x ou de $-x$ est toujours le même) plus grande que a , par exemple, $= a + d$, l'on aura $y^2 = a^2 - x^2 = a^2 - a^2 - 2ad - dd = -2ad - d^2$; donc y sera alors $= \pm \sqrt{-2ad - d^2}$, quantité imaginaire qui fait voir que le cercle est terminé en a & en b , extrémités du diamètre, ce qu'on sait d'ailleurs.

COROLLAIRE III. Puisque $y = \pm \sqrt{a^2 - x^2}$, si, en supposant le diamètre $= 2$, par exemple, & le rayon $= 1$, on prend successivement plusieurs abscisses $cp = 0, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \&c.$ & que pour chaque abscisse on calcule la valeur correspondante de y , en faisant $pm, pm', \&c.$ égales aux valeurs trouvées ; qu'on fasse la même chose du côté de b , & qu'on fasse passer une courbe par tous les points m, m' , on aura un cercle d'autant plus exact qu'on aura pris les ordonnées plus près les unes des autres, & qu'on aura calculé leurs valeurs avec plus d'exactitude : or l'on peut trouver ces valeurs aussi approchées que l'on voudra, par le moyen des décimales.

23. DÉFINITIONS. L'Ellipse est une courbe

$amAm'$ (fig. 6.) telle que la somme des lignes mf , mF tirées de chacun de ses points à deux points fixes f , F qu'on appelle Foyers, est toujours égale à son grand axe aA . L'Hyperbole est une courbe am (fig. 7.), telle que la différence des lignes mf , mF tirées de chacun de ses points m aux points fixes f , F qu'on appelle Foyers, est égale à son premier axe aA . Dans l'Ellipse on appelle second axe ou petit axe la ligne bB qui coupe en deux parties égales & perpendiculairement le grand axe aA : on appelle excentricité dans l'Ellipse & l'Hyperbole la distance $Cf = CF$ du milieu du premier axe Aa (ce milieu est le centre de la courbe), à chaque foyer. Mais dans l'Hyperbole le second axe bB est le double de Cb , côté d'un triangle rectangle, dont l'hypothénuse $ab = Cf$, & l'autre côté Ca est la moitié du premier axe aA . Les lignes Pm , mp tirées de chacun des points m de l'Ellipse ou de l'Hyperbole perpendiculairement sur le premier ou le second axe, sont les ordonnées de ces axes ; les parties de l'axe aP , AP sont les abscisses du premier axe. On appelle *parametre* d'un axe une troisième proportionnelle à cet axe & à l'autre axe. Nous ferons dans la suite le premier demi-axe aC d'une Ellipse ou d'une Hyperbole $= a$, le petit demi-axe $= b$, l'excentricité $Cf = c$, l'ordonnée $Pm = y$, l'abscisse $aP = x$; ainsi $PA = 2a - x$ dans l'Ellipse, mais $PA = 2a + x$ dans l'Hyperbole. Donc le produit des abscisses est $= 2ax - x^2$ dans l'Ellipse, & $= 2ax + x^2$ dans l'Hyperbole. Mais en comptant les abscisses depuis le centre C , & faisant $CP = x$, on a $Pa = a - x$, & $PA = a + x$ dans l'Ellipse ; au contraire dans l'Hyperbole $Pa =$

$= x - a$, & $PA = x + a$; donc le produit des abscisses fera dans ce cas $aa - xx$ pour l'Ellipse & $x^2 - a^2$ pour l'Hyperbole.

24. THÉORÈME. Dans l'Ellipse (fig. 8.) le carré du petit demi-axe est moyen proportionnel entre les distances d'un des foyers f ou F aux extrémités a & A du grand axe. Car $af = aC - fC = a - c$, & $Af = fC + CA = a + c$; or le triangle rectangle BfC donne $\overline{BC}^2 = \overline{Bf}^2 - \overline{Cf}^2$; mais $Bf = BF$, car les triangles BCf , BCF ont les deux côtés qui comprennent l'angle droit égaux, ce qui (Géom. 50.) les rend égaux; donc $Bf = BF$, mais (23.) $Bf + BF = 2a$; donc $Bf = a$ & $\overline{Bf}^2 = a^2$; donc l'équation $\overline{BC}^2 = \overline{Bf}^2 - \overline{Cf}^2$ devient $b^2 = a^2 - c^2 = \overline{a-c} \times \overline{a+c} = af \times fA$; donc $a - c : b :: b : a + c$.

25. THÉORÈME. La même chose a lieu dans l'Hyperbole (fig. 7.) ; car le triangle rectangle BaC donne $\overline{BC}^2 = \overline{aB}^2 - \overline{Ca}^2$; or (23.) $aB = Cf = c$; donc $b^2 = c^2 - a^2 = \overline{c-a} \times \overline{c+a}$; donc $c - a : b :: b : c + a$.

26. THÉORÈME. Dans l'Ellipse le carré d'une ordonnée quelconque au premier axe (fig. 6.), est au produit de ses abscisses comme le carré du petit demi-axe au carré du demi grand axe. Puisque $mf + mF = 2a$ (23.), appelant $2d$ la différence de mF à mf , on aura le plus petit rayon vecteur $fm = a - d$, mais le plus grand rayon vecteur Fm fera $= a + d$; * donc $\overline{fm}^2 = a^2 -$

* Car nous avons démontré (voyez les Équations) dans le calcul, que la somme de deux quantités étant donnée, la plus grande est égale à la moitié de la somme

$2ad + d^2$, & $\overline{Fm}^2 = a^2 + 2ad + d^2$; mais $fP = Cf - CP = c - x$, * & $FP = c + x$ en comptant les abscisses du centre C. Or les triangles rectangles mPf , mPF donnent $\overline{fm}^2 = \overline{mP}^2 + \overline{fP}^2$, $\overline{mF}^2 = \overline{Pm}^2 + \overline{PF}^2$; donc on aura les équations

$$a^2 - 2ad + d^2 = y^2 + c^2 - 2cx + x^2$$

$$a^2 + 2ad + d^2 = y^2 + c^2 + 2cx + x^2$$

retranchant la première de la seconde, l'on trouve

$$4ad = 4cx, \text{ d'où l'on tire } d = \frac{4cx}{4a} = \frac{cx}{a} \text{ \& }$$

$$d^2 = \frac{c^2 x^2}{a^2}. \text{ Substituant ces valeurs de } d \text{ \& de } d^2$$

dans la première équation, il viendra $a^2 - 2cx$

$$+ \frac{c^2 x^2}{a^2} = y^2 + c^2 - 2cx + x^2. \text{ Effaçant de part}$$

\& d'autre la quantité $-2cx$ \& transposant, on

$$\text{aura } a^2 - c^2 - x^2 + \frac{c^2 x^2}{a^2} = y^2, \text{ \& en ôtant la frac-}$$

$$\text{tion, } \overline{a^2 - c^2} \times \overline{a^2 - a^2} \times \overline{x^2 + c^2 \times x^2} = a^2 y^2 :$$

faisant attention que $a^2 - c^2 = b^2$ (24.), \& que par

conséquent. $-a^2 x^2 + c^2 \times x^2 = -b^2 \times x^2$, on verra

facilement que notre équation devient $b^2 \times a^2 - x^2$

$\times b^2 = a^2 y^2$, ou $b^2 \times \overline{a^2 - x^2} = a^2 y^2$, d'où l'on

tire $y^2 : a^2 - x^2 :: b^2 : a^2$. Ce qu'il falloit dé-

montrer.

somme, plus la moitié de la différence, la plus petite étant égale à la moitié de la somme moins la moitié de la différence.

* Si le point P étoit plus éloigné du centre que le point f, l'on auroit $fP = x - c$; mais l'équation seroit toujours la même, parce que $\overline{c - x}^2 = \overline{x - c}^2$.

\&

27. THÉORÈME. *La même chose a lieu dans l'Hyperbole (fig. 7.) : car puisque (13.)* $Fm \rightarrow fm = 2a$, en appellant $2q$ la somme $fm + Fm$, on aura le plus petit rayon vecteur $fm = q - a$, & $Fm = q + a$; mais les triangles rectangles fmp , Fmp donnent $fm^2 = pm^2 + fp^2$, $Fm^2 = fp^2 + pm^2$, d'où l'on tire les deux équations suivantes :

$$q^2 - 2aq + a^2 = y^2 + c^2 - 2cx + x^2$$

$$q^2 + 2aq + a^2 = y^2 + c^2 + 2cx + x^2.$$

Retranchant la première de la seconde, le premier membre du premier membre, le second du second, il vient $4aq = 4cx$, d'où l'on tire $q = \frac{cx}{a}$ & $q^2 = \frac{c^2 x^2}{a^2}$. Substituant ces valeurs de q

& de q^2 dans la première équation, on a $\frac{c^2 x^2}{a^2} - 2cx + a^2 = y^2 + c^2 - 2cx + x^2$. Effaçant $-2cx$ de part & d'autre & transposant, $\frac{c^2 x^2}{a^2} - x^2 + a^2 - c^2 = y^2$, & en ôtant la fraction, $c^2 \times x^2 - a^2 \times x^2 + a^2 - c^2 \times a^2 = a^2 y^2$, ou $b^2 \times x^2 - b^2 \times a^2 = a^2 y^2$ (à cause de $c^2 - a^2 = b^2$, & par conséquent $a^2 - c^2 = -b^2$) ; donc $b^2 \times x^2 - a^2 = a^2 y^2$, d'où l'on tire $y^2 : x^2 - a^2 :: b^2 : a^2$; donc, &c.

28. COROLLAIRE I. *Il suit des deux Théorèmes précédents, que dans l'Ellipse & l'Hyperbole les quarrés des ordonnées sont entr'eux comme les produits de leurs abscisses.*

29. COROLLAIRE II. 1° De l'équation $y^2 : x^2 - a^2 = b^2 : a^2$
Tome II, B

$x \sqrt{a^2 - x^2}$, ou $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times \sqrt{a^2 - x^2}$, on tire $y =$
 $\pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$; ce qui fait voir qu'à chaque abscisse CP il répond deux ordonnées égales, l'une positive, l'autre négative. 2°. De la proportion $y^2 : x^2 - a^2 :: b^2 : a^2$, on tire l'équation à l'Hyperbole $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times x^2 - a^2$ & $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$. 3°. Si dans l'équation $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$, on fait $x = a$, on aura $y = 0$; mais en faisant $x > a$, la quantité $\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ deviendra imaginaire; ainsi l'Ellipse est terminée aux extrémités a & A du grand axe. Mais si dans l'Hyperbole on fait x ou $-x = a$, on aura $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{(x^2 - a^2)} = 0$, ce qui prouve que la courbe passe par les deux sommets a & A , & s'étend du côté de F aussi bien que du côté de f , de sorte que l'Hyperbole est composée de deux courbes am , An , qu'on appelle Hyperboles conjuguées, dont les ordonnées croissent, d'autant plus que les abscisses deviennent plus grandes. De plus, ces Hyperboles conjuguées sont égales; car en prenant les abscisses positives ou négatives, pourvu qu'elles soient égales, la quantité x^2 est toujours la même (car $x^2 = +x \times +x = -x \times -x$). Si l'on suppose $x < a = Ca$, y devient imaginaire. Donc la courbe n'a aucun point qui réponde aux abscisses comprises entre a & A .

30. Si dans les équations à l'Ellipse & l'Hyperbole on compte les abscisses du sommet a , le pro-

duit des abscisses sera, $2ax - x^2$ pour l'Ellipse, & $2ax + x^2$ pour l'Hyperbole (23.); ainsi l'équation à l'Ellipse $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times \overline{a^2 - x^2}$ deviendra

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times \overline{2ax - x^2}, \text{ \& l'équation à l'Hyperbole } y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times \overline{x^2 - a^2} \text{ deviendra } y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times \overline{2ax + x^2}.$$

31. Puisque le parametre p du premier axe se trouve (23.) en faisant $2a : 2b :: 2b : p$, ce qui donne (* Calcul 56) $2a : p :: 4a^2 : 4b^2 :: a^2 : b^2$, il s'ensuit que $\frac{p}{2a} = \frac{b^2}{a^2}$. Si dans les deux équations de l'Ellipse & de l'Hyperbole, dont nous venons de parler, on substitue la valeur de $\frac{b^2}{a^2}$, on

aura pour l'Ellipse $y^2 = \frac{p}{2a} \times \overline{a^2 - x^2} = \frac{pa}{2} - \frac{px^2}{2a}$, & $y^2 = px - \frac{px^2}{2a}$. Mais on aura pour l'Hyperbole $y^2 = \frac{p}{2a} \times \overline{x^2 - a^2} = \frac{px^2}{2a} - \frac{pa}{2}$ & $y^2 = \frac{p}{2a} \times \overline{2ax + x^2} = px + \frac{px^2}{2a}$. Telles sont les équations par rapport au parametre de l'Ellipse & de l'Hyperbole.

32. De l'équation à l'Ellipse, $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times \overline{a^2 - x^2}$,

* En considérant une proportion continue comme une progression, dont les autres termes sont inconnus, l'on a la propriété annoncée par le N^o 56 de la premiere Partie.

il suit que les deux axes devenant égaux, ce qui donnera $a^2 = b^2$, ou $\frac{b^2}{a^2} = 1$, l'on aura $y^2 = 1 \times$

$(a^2 - x^2) = a^2 - x^2 = 2ax - x^2$, équation au cercle : ainsi le cercle est une Ellipse, dont les axes sont égaux. Mais les axes de l'Hyperbole devenant égaux, on a $y^2 = x^2 - a^2$, $y^2 = 2ax + x^2$. Dans ce cas l'Hyperbole est dite équilatère.

REMARQUE. Dans l'Hyperbole, b peut être plus petit, égal ou plus grand que a ; mais dans l'Ellipse, b est nécessairement plus petit que a . Car (fig. 8.) $fB = a$, étant l'hypothénuse du triangle rectangle fBC , est nécessairement plus grande que $BC = b$.

33. PROBLÈME. Trouver l'équation de l'Ellipse & de l'Hyperbole par rapport au second axe. A cause de mp (fig. 6 & 7.) $CP = x$, & de $Cp = Pm = y$, il suffit de changer y en x & réciproquement, ce qui donne pour l'Ellipse x^2

$$= \frac{b^2}{a^2} \times \overline{a^2 - y^2}, \text{ ou } x^2 \times a^2 = b^2 \times a^2 - y^2 \times b^2,$$

transposant on a $y^2 \times b^2 = b^2 \times a^2 - x^2 \times a^2$, d'où l'on tire $y^2 ; b^2 - x^2 :: a^2 : b^2$, & $y^2 =$

$$\frac{a^2}{b^2} \times \overline{b^2 - x^2}. \text{ Donc 1}^\circ. \text{ le carré d'une ordonnée}$$

au petit axe, est au produit de ses abscisses comme le carré du demi-grand axe au carré du demi-petit axe. Donc 2^o. l'équation au petit axe de l'Ellipse est semblable à celle du grand axe. Si dans

l'équation à l'Hyperbole $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times \overline{x^2 - a^2}$, on

change y en x , & réciproquement on aura $x^2 =$

$$\frac{b^2}{a^2} \times y^2 - a^2 \times \frac{b^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} \times y^2 - b^2, \text{ \& en transposant,}$$

$$x^2 + b^2 = \frac{b^2}{a^2} y^2. \text{ Multipliant par } a^2 \text{ \& divisant par}$$

$$b^2, \text{ on trouve } y^2 = \frac{a^2}{b^2} \times \overline{b^2 + x^2}, \text{ d'o\`u l'on tire}$$

$y^2 : b^2 + x^2 :: a^2 : b^2$. Donc 1^o le carré d'une ordonnée quelconque au second axe de l'Hyperbole est à la somme du carré de l'abscisse & du carré du demi-second axe, comme le carré de la moitié du premier au carré de la moitié du second. Donc 2^o l'équation de l'Hyperbole, par rapport au second axe, n'est pas semblable à celle du premier.

COROLLAIRE. Des équations $y^2 = \frac{a^2}{b^2} \times \overline{b^2 - x^2}$,

$$y^2 = \frac{a^2}{b^2} \times \overline{b^2 + x^2}, \text{ on tire } y = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - x^2},$$

$$y = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + x^2}. \text{ Ces équations font voir 1^o.}$$

qu'à chaque abscisse du second axe d'une Ellipse ou d'une Hyperbole répondent deux ordonnées égales, l'une positive pm , l'autre négative po ; ainsi le second axe, comme le premier, partage la courbe en deux parties égales. 2^o. Que dans l'Ellipse x ne peut pas être plus grande que b ; mais dans l'Hyperbole x peut croître à l'infini. Ainsi l'Hyperbole est composée de quatre branches égales, qui s'éloignent à l'infini du premier & du second axe*.

REMARQUE. Le paramètre p' du second axe de

* On suppose que les axes sont prolongés.

l'Ellipse & de l'Hyperbole se trouve par la proportion $2b : 2a :: 2a p' : 2b p'$, d'où l'on tire $2b p' :: 4b^2 : 4a^2 :: b^2 : a^2$, ou $\frac{a^2}{b^2} = \frac{p'}{2b}$. Si l'on substitue cette valeur de $\frac{a^2}{b^2}$ dans les équations de

l'Ellipse & de l'Hyperbole, on aura $y^2 = \frac{p'b}{2} - \frac{p'x^2}{2b}$ pour l'Ellipse, & $y^2 = \frac{p'b}{2} + \frac{p'x^2}{2b}$ pour l'Hyperbole.

34. THÉORÈME. La surface d'une Ellipse a, b Am' est à celle d'un cercle décrit sur son grand axe, comme le petit demi-axe b est au demi-grand axe a (fig. 6.) : car par la propriété du cercle (22.) le carré z^2 d'une ordonnée Pn quelconque est $= a^2 - x^2$, & par la propriété de l'Ellipse, le carré y^2 de l'ordonnée Pm correspondante à la même abscisse est $= \frac{b^2}{a^2} \times a^2 - x^2$; donc $y^2 : z^2 :: \frac{b^2}{a^2} \times a^2 - x^2 : a^2 - x^2$, ou (en multipliant les deux derniers termes de la proportion par a^2 & les divisant par $a^2 - x^2$) $y^2 : z^2 :: b^2 : a^2$; ainsi $y : z :: b : a$; donc la somme de tous les y est à la somme de tous les z comme $b : a$; or la somme de tous les y est égale à la surface de l'Ellipse, & la somme de tous les z est égale à la surface du cercle ; donc, &c.

COROLLAIRE I. Puisque (33.) l'équation, par rapport au petit axe de l'Ellipse, est semblable à celle du premier, il est visible que la surface d'un cercle décrit sur le petit axe de l'Ellipse, pris pour

diamètre, est à la surface de l'Ellipse, comme le demi-petit axe de l'Ellipse, est à son demi-grand axe.

COROLLAIRE II. La surface S d'une Ellipse, est égale à celle d'un cercle, dont le rayon seroit $= \sqrt{ab}$; c'est-à-dire, moyen proportionnel entre les deux demi-axes. Car soit c la circonférence d'un cercle dont le rayon $= r$, en faisant $r : c :: a : \frac{ca}{r}$ (car les rayons sont proportionnels aux circonférences), on aura celle du rayon a . Multipliant cette quantité par la moitié du rayon, ou par $\frac{a}{2}$, on aura la surface du cercle décrit sur le grand axe $= \frac{ca^2}{2r}$. Mais par le Théorème S : $\frac{ca^2}{2r} :: b : a$; donc $S = \frac{ca^2 b}{2ra} = \frac{cab}{2r}$; or telle est la surface du cercle dont le rayon $= \sqrt{ab}$: car sa circonférence se trouve en faisant $r : c :: \sqrt{ab} : \frac{c}{r}\sqrt{ab}$. Multipliant cette circonférence par $\frac{\sqrt{ab}}{2}$, moitié de son rayon, l'on a la surface $= \frac{cab}{2r} = S$; donc, &c.

COROLLAIRE III. Donc pour avoir la surface d'une Ellipse, dont les demi-axes sont a & b , il suffit de chercher celle d'un cercle, dont le rayon soit moyen proportionnel entre a & b ; on peut voir par-là que la quadrature de l'Ellipse dépend de celle du cercle.

COROLLAIRE IV. Il suit du second Corollaire, que les surfaces des deux Ellipses, dont les demi-

grands axes sont a & A ; les demi-petits axes b & B , sont entre elles comme les produits $a . b$, $A . B$ de leurs demi-axes. Car la surface S de la première $= \frac{c a b}{2 r}$, & la surface f de la seconde $= \frac{c A B}{2 r}$;

donc $S : f :: \frac{c a b}{2 r} : \frac{c A B}{2 r} :: a b : A B$; donc , &c.

35. THÉORÈME. La double ordonnée qui passeroit par le foyer f d'une Ellipse ou d'une Hyperbole , seroit égale au parametre du premier axe (fig. 6 & 7).

Car si dans l'équation $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (a^2 - x^2)$, on suppose $x = c$, elle deviendra $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (a^2 - c^2) = \frac{b^4}{a^2}$, d'où l'on tire $y = \frac{b^2}{a}$ & $2y = \frac{2b^2}{a} = p$. Mais pour l'Hyperbole , on a $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (c^2 - a^2) = \frac{b^4}{a^2}$ (à cause de $b^2 = c^2 - a^2$ dans l'Hyperbole) ; donc $y = \frac{b^2}{a}$, & $2y = \frac{2b^2}{a} = p$; puisque (par le n°. 23.) $2a : 2b :: 2b : p = \frac{4b^2}{2a} = \frac{2b^2}{a}$. Nous avons aussi démontré la même chose (8) à l'égard de la parabole.

36. PROBLÈME. Par un point donné m de l'Ellipse ou de l'Hyperbole , mener une tangente à la courbe (fig. 9 & 7.). Dans l'Ellipse ayant fait le prolongement ml de $fm = Fm$, & mené la ligne Fl , par le milieu i de cette ligne & par le point m menez mi . Dans l'Hyperbole (fig. 7.) ayant pris sur Fm la partie $ml = fm$, & tiré la

ligne lf , tirez par le point m & par le milieu i de fl la ligne mt , & le Problème sera résolu. En effet tout autre point y de mt ne sauroit être à l'Ellipse ou à l'Hyperbole. Car $fm + Fm = fl = 2a$ dans l'Ellipse, & $Fm - fm = Fm - ml = 2a$ dans l'Hyperbole. Mais à cause de $Fm = ml$ dans l'Ellipse, de $fm = ml$ dans l'Hyperbole, & de mt perpendiculaire sur le milieu de Fl dans l'Ellipse, & sur le milieu de fl dans l'Hyperbole, tous les points de mt sont également éloignés de F & de l dans l'Ellipse, de f & de l dans l'Hyperbole; donc dans l'Ellipse $yl = yF$; donc $yf + yl = yf + yF$: or $yf + yl$ vaut plus que $fl = 2a$; donc $(yf + yF) > 2a$; donc le point y n'appartient pas à l'Ellipse. On prouvera la même chose pour tout autre point situé sur mt . Dans l'Hyperbole $Fm - fm = Fm - ml = 2a$; mais $Fy - yf = Fy - yl$ n'est pas $= 2a = Fl$, autrement l'on auroit $Fy = Fl + ly$, ce qui est absurde; donc le point y n'appartient pas à la courbe. On peut prouver la même chose pour tout autre point situé sur mt ; donc la ligne mt n'a d'autre point commun avec la courbe que le seul point m ; donc, &c.

COROLLAIRE I. Dans l'Ellipse & l'Hyperbole les angles formés par la tangente, & les deux rayons vecteurs qui aboutissent au point de contact sont égaux. Car dans l'Ellipse $Fmi = iml = fmy$ (son opposé au sommet). Dans l'Hyperbole $fmi = iml$, parce que mt divisant en deux également la base du triangle isocelle fml & passant par m , doit diviser l'angle m en deux également. De plus l'angle $Fmi = xmy$ sont opposés au sommet.

COROLLAIRE II. Donc si d'un des foyers de l'Ellipse ou de l'Hyperbole partent des rayons de lumière qui tombent sur la surface intérieure d'un corps formé par la révolution d'une Ellipse, ou d'une Hyperbole autour de son axe aA , ces rayons se réfléchiront vers l'autre foyer dans l'Ellipse; mais dans l'Hyperbole leurs prolongemens seulement aboutiront à l'autre foyer. Et réciproquement si dans l'Hyperbole les rayons partent du foyer le plus éloigné, ils réfléchiront sur la convexité de l'Hyperbole, de manière que les prolongemens mf des rayons réfléchis mM passeront par le premier foyer, & les rayons mM paroîtront venir de ce dernier foyer.

37. THÉORÈME. Si du centre de l'Ellipse ou de l'Hyperbole on tire la ligne Ci , l'on aura $Ci = a$ (fig. 9 & 7.). Dans l'Ellipse $Cf = CF$, & $Fi = it$; donc $Ff = 2CF : CF :: Fl : Fi$; donc les triangles Ffl , FCi sont semblables*; donc $fF : FC :: fl = 2a : Ci$; mais Ff est double de FC ; donc $fl = 2a$ est double de Ci ; donc $Ci = a$. Par un raisonnement semblable on verra que les triangles fIF , fiC (fig. 7.) sont semblables, & que $Ci = \frac{FI}{2} = \frac{2a}{2} = a$; donc, &c.

COROLLAIRE I. Il suit du Théorème que si du point C comme centre, & de l'intervalle $CA = a$ (fig. 9 & 10,) on décrit un cercle, les perpendiculaires Fi , fd tirées des foyers F & f de l'Ellipse, & de l'Hyperbole sur la tangente mt , prolongée s'il le faut,

* Deux triangles sont semblables, lorsqu'ils ont deux côtés adjacens à un angle égal proportionnels.

aboutiront à sa circonférence. Car les lignes Fi , fd , étant perpendiculaires sur mi , sont nécessairement parallèles, aussi-bien que fl & iCD (par la démonstration du Théorème précédent); donc 1°. $Fi = li = fD$. D'ailleurs l'angle droit idD est appuyé sur le diamètre iD ; donc le point d est dans la circonférence du cercle décrit du point C avec le rayon $Ci = a$; donc les points d , D , i sont situés sur la circonférence de ce cercle, & Ci , CD sont des rayons; donc, &c.

COROLLAIRE II. *Donc le produit des perpendiculaires abaissées des foyers de l'Ellipse & de l'Hyperbole sur la tangente est toujours égal au carré du second demi-axe.* Car par la propriété des cordes (Géom. 53), $fd \times fD = af \times fA$ (fig. 9.) $= \overline{a-c} \times \overline{a+c} = aa - cc = b^2$; or $fD = Fi$, à cause des parallèles Fl , fd ; donc $fd \times Fi = b^2$. Dans la fig. 10, par la propriété des secantes, (Géom. 56.) $fd \times fD = fd \times Fi = fd \times li = fa \times fA = fa \times Fa = b^2$.

COROLLAIRE III. *Les perpendiculaires Fi abaissées du foyer F sur les tangentes aux différens points m de l'Ellipse & de l'Hyperbole croissent dans l'Ellipse plus que les racines des rayons vecteurs Fm & moins dans l'Hyperbole.* Dans l'Ellipse (fig. 9.) les triangles fmd , Fmi sont semblables, ayant les angles en d & i droits, & les angles dmf , imF égaux (36.); donc $Fi : Fm ::$

$fd : fm$; donc $Fi = \frac{fd \cdot Fm}{fm}$; donc (en multipliant tout par Fi) $Fi^2 = p^2$ (en faisant $Fi = p$)

$= Fi \times fd \times \frac{Fm}{fm} = b^2 \times \frac{Fm}{fm}$; donc pour une autre tangente dont la perpendiculaire soit P , on aura $P^2 = b^2 \times \frac{Fm'}{fm'}$ (F m' , f m' désignent les rayons vecteurs correspondans à P) ; donc $p^2 : P^2 :: b^2 \times \frac{Fm}{fm} : b^2 \times \frac{Fm'}{fm'} :: \frac{Fm}{fm} : \frac{Fm'}{fm'}$, & $p : P :: \sqrt{\left(\frac{Fm}{fm}\right)} : \sqrt{\left(\frac{Fm'}{fm'}\right)}$. La même proportion a lieu (fig. 10.) dans l'Hyperbole , ainsi qu'on peut le démontrer facilement par le moyen des triangles F m i , f m d (la démonstration est la même *). Mais dans l'Ellipse F m croissant , f m diminue , puisqu'on a toujours $Fm + mf = 2a$; dans l'Hyperbole au contraire F m croissant , f m croît aussi : parce que la différence de ces lignes est toujours $= 2a$; donc dans l'Ellipse les fractions $\frac{Fm}{fm}$ croissent dans un plus grand rapport que si f m étant constante , F m = r croissoit seul ; au contraire dans l'Hyperbole les fractions $\frac{Fm}{fm}$ croissent moins que si f m étoit constante ; donc les perpendiculaires croissent dans l'Ellipse dans un plus grand rapport que les \sqrt{r} & dans un moindre rapport dans

* Lorsqu'une même démonstration peut s'appliquer à l'Ellipse & à l'Hyperbole , on peut le faire d'abord par rapport à l'Ellipse , & la recommencer ensuite en l'appliquant à l'Hyperbole.

l'Hyperbole ; mais (14) elles croissent comme les racines des rayons vecteurs dans la parabole *.

38. PROBLÈME. Trouver l'expression des rayons vecteurs $f m$, $F m$ de l'Ellipse & de l'Hyperbole (fig. 6 & 7). Pour l'Ellipse appellant $2 q$ la différence de $f m$ & $F m$; & faisant $= 2 q$ la somme

de $f m$ & $F m$ dans l'Hyperbole , on a $q = \frac{c x}{a}$ **

(16) ; donc $f m = a - \frac{c x}{a} = \frac{a^2 - c x}{a}$, & $F m =$

$a + \frac{c x}{a} = \frac{a^2 + c x}{a}$. Mais dans l'Hyperbole on a

$f m = q - a = \frac{c x}{a} - a = \frac{c x - a^2}{a}$; & $F m$

$= q + a = \frac{c x}{a} + a = \frac{c x + a^2}{a}$.

39. THÉORÈME. Dans l'Ellipse la sous-normale

$P q = \frac{b^2 x}{a^2} = \frac{p x}{2 a}$ (à cause de $\frac{b b}{a} = \frac{p}{2}$)

(fig. 10. X) ; car les lignes $q m$, $F i$ étant perpendiculaires sur $m t$ sont nécessairement parallèles ; donc (Géom. 46.) $F i (2 a) : F f (2 c) :: m t$

$= F m = \frac{a a - c x}{a}$ (Problème précédent ***) : $F q$

$= 2 c \times \frac{a a - c x}{a} = \frac{a a c - c c x}{a a}$; or $P q = F q$

* Cette proposition est utile dans l'Astronomie-Physique.

** Nous appelons ici $2 q$ ce que nous avons appelé (16) $2 d$. Voyez les numéros 26 & 27.

*** $F m$ désigne ici le plus petit rayon vecteur.

—FP, & FP = CF — CP = $c - x$; donc $Pq = \frac{aac - ccx}{aa} = c + x$ (en réduisant le tout en fraction & effaçant les quantités qui se détruisent)
 $\frac{a^2x - c^2x}{a^2} = \frac{b^2x}{a^2} = \frac{px}{2a}$, à cause de $aa - cc = b^2$.

40. THÉORÈME. Dans l'Ellipse la sous-tangente

$Pt = \frac{a^2 - x^2}{x}$; mais dans l'Hyperbole $Pt =$

$\frac{x^2 - a^2}{x}$ (fig. 10 X, & 7.). Car dans l'une &

l'autre courbe le triangle rectangle qmt donne

$qP : Pm :: Pm : Pt = \frac{Pm^2}{Pq} = \frac{y^2}{Pq}$; or $y^2 =$

$\frac{b^2}{a^2} \times (a^2 - x^2)$, dans l'Ellipse; donc dans cette

courbe $Pt = \frac{\frac{b^2}{a^2} \times (a^2 - x^2)}{\frac{b^2x}{a^2}} = \frac{a^2 - x^2}{x}$.

Mais dans l'Hyperbole $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (x^2 - a^2)$; donc

dans cette courbe $Pt = \frac{\frac{b^2}{a^2} \times (x^2 - a^2)}{\frac{b^2x}{a^2}} = \frac{xx - aa}{x}$.

COROLLAIRE I. Donc $CP \times Pt = a^2 - x^2$ dans l'Ellipse, mais $CP \times Pt = x^2 - a^2$ dans l'Hyperbole; donc faisant $Pt = S$, on aura $Sx = a^2 - x^2$ dans l'Ellipse, & $Sx = x^2 - a^2$ dans l'Hyperbole.

REMARQUE. Si dans l'expression de Pq & pt on compte les abscisses du sommet, ou de l'origine de l'axe, alors x se changera en $a \mp x$, & l'on aura, toute réduction faite, $Pq = \frac{p}{2} \mp \frac{px}{2a}$, &

$Pt = \frac{2ax \mp x^2}{a \mp x}$. Les signes supérieurs ont lieu dans l'Ellipse, & les inférieurs dans l'Hyperbole. Mais dans la Parabole, ainsi que nous l'avons déjà vu, la sous-normale est $= \frac{p}{2}$, & la sous-tangente

$= 2x$. Donc dans les Sections Coniques la sous-normale est égale à la moitié du paramètre dans la Parabole, moindre dans l'Ellipse & plus grande dans l'Hyperbole. À l'égard de la sous-tangente, elle est égale au double de l'abscisse dans la Parabole, plus grande dans l'Ellipse, moindre dans l'Hyperbole (on compte les abscisses du sommet de la courbe). Car dans l'Ellipse $\frac{2ax \mp x^2}{a \mp x} >$

$\frac{2ax \mp x^2}{a \mp x} = 2x$. Mais dans l'Hyperbole $Pt =$

$\frac{2ax + x^2}{a + x} < \frac{2ax + x^2}{a + x} = 2x$; donc, &c.

COROLLAIRE II. Donc $Ct = \frac{a^2}{x}$; car dans l'El-

lipse $Ct = \frac{a^2 - x^2}{x} + x = \frac{a^2 - xx + xx}{x} =$

$\frac{a^2}{x}$. Dans l'Hyperbole $Ct = CP - Pt = x -$

$\left(\frac{x^2 - a^2}{x}\right) = \frac{a^2}{x}$.

COROLLAIRE III. Il suit du Corollaire précédent que $CP : Ca :: Ca : Ct$. Ainsi pour trouver Ct il faut prendre une troisième proportionnelle à l'abscisse & au demi-axe. Le point t étant trouvé par t & par m , on mènera une ligne mt qui sera une tangente.

COROLLAIRE IV. Retranchant AP de Pt dans l'Ellipse, & aP de Pt dans l'Hyperbole & comptant les abscisses du sommet, l'on aura At (fig. 10 X) & at (fig. 7.) = $\frac{2ax + x^2}{a + x} - x = \frac{ax}{a + x}$; mais dans la Parabole (fig. 1.), $At = x$; donc la distance du sommet à la rencontre de l'axe & de la tangente est, par rapport à l'abscisse, égale dans la Parabole, plus grande dans l'Ellipse, moindre dans l'Hyperbole.

REMARQUE. Si dans l'expression de $Pt = \frac{a^2 - x^2}{x}$, on suppose $x = 0$, l'on aura $Pt = \frac{a^2}{0} = \infty$ *

(voyez ce que nous avons dit sur l'infini dans la première partie). Ainsi la tangente qui répond à l'extrémité du petit axe est infinie & parallèle au grand axe de l'Ellipse; mais en faisant x négative, Pt devient négative; ce qui fait voir qu'une quantité en passant du positif au négatif, passe quelquefois par l'infini; mais d'autres fois elle passe par 0, comme on le voit dans la progression arithmétique, $\div 4. 2. 0. - 2. - 4. - 6.$ &c. La raison en est qu'une quantité en passant du positif au négatif, doit se trouver dans une limite,

* En considérant 0 comme une quantité infiniment petite.

qui ne soit pas plutôt positive que négative ; or on n'est pas plutôt positif que négatif : il en est de même de l'infini. Mais une quantité $\sqrt{a-x}$ ne peut de réelle devenir imaginaire, ou d'imaginaire devenir réelle, que la quantité $a-x$ ne passe du positif au négatif dans le premier cas, du négatif au positif dans le second cas : une quantité ne peut donc passer du réel à l'imaginaire & réciproquement qu'en passant par le 0, ou par ∞ ; ce qu'il est bon de remarquer.

Si dans l'expression de $at = \frac{ax}{a+x}$ dans l'Hyperbole, on suppose $x = \infty$, l'on aura $at = \frac{a \cdot \infty}{\infty} = a$. Ainsi at ne peut jamais surpasser aC , & toutes les tangentes de l'Hyperbole tombent entre C & a ; & dans ce cas $Ct = \frac{a^2}{x} = \frac{a^2}{\infty} = 0$.^{*} Mais dans la parabole (fig. 4.) $at = x$ devient infinie lorsque $x = \infty$. Cela vient de ce que la parabole est moins ouverte que l'Hyperbole : en effet on a $y = \pm \sqrt{px}$ dans la parabole ; & $y = \pm \left(px + \frac{px^2}{2a} \right)$ dans l'Hyperbole ; donc le paramètre p & l'abscisse x étant supposés les mêmes dans l'une & l'autre courbe, les ordonnées de l'Hyperbole sont plus grandes que celles de la parabole ; & en faisant $= Y$ l'ordonnée de l'Hyperbole & $= y$ celle de la parabole, l'on a (à l'infini) $y : Y :: (\sqrt{p \infty}) : \left(p \infty + \frac{p \infty^2}{2a} \right) :: \sqrt{\infty} : \left(\frac{\sqrt{\infty^2}}{\sqrt{2a}} \right) :: \sqrt{2a} \times$

* C'est-à-dire infiniment petite : on peut la regarder comme $= 0$ respectivement à at .

$\sqrt{\infty} : \infty$, en divisant par \sqrt{p} , faisant attention que $\infty + \frac{\infty^2}{2a} = \frac{\infty^2}{2a}$, & multipliant par $2a$; donc, &c.

41. THÉORÈME. La sous-tangente pT au second axe de l'Ellipse & de l'Hyperbole (fig. 10 X & 7),

est $= \frac{b^2 - y^2}{y}$, dans l'Ellipse; mais $pT = \frac{b^2 + y^2}{y}$

dans l'Hyperbole, en appelant y l'abscisse pC du second axe. Les triangles semblables $t m P$, $m T p$ donnent $tP : P m = pC :: m p = pC : pT$;

c'est-à-dire $\pm \frac{a^2 \mp x^2}{x} : y :: x : pT = \frac{x^2 y}{\pm a^2 \mp x^2}$;

or $\pm a^2 \mp x^2 = \frac{a^2 y^2}{b^2}$, ce qu'on tire aisément

de l'équation de l'Ellipse & de l'Hyperbole, $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (\pm a^2 \mp x^2)$, qui de plus donne x^2

$= \frac{a^2 b^2 \mp a^2 y^2}{b^2}$. Substituant ces valeurs dans

$\frac{x^2 y}{\pm a^2 \mp x^2}$, on a $pT = \frac{b^2 \mp y^2}{y}$. Ce qui four-

nit un autre moyen de mener une tangente à l'Ellipse & à l'Hyperbole. Si on ajoute y à pT pour l'Ellipse, & si l'on retranche y de pT pour l'Hyperbole, on trouvera $CT = \frac{b^2}{y}$.

Des Asymptotes de l'Hyperbole, & des Diamètres de l'Ellipse & de l'Hyperbole.

42. DÉFINITIONS. Si par le sommet a de l'Hyperbole (fig. 11.) on mène Yax perpendi-

culairement fut Ca , qu'on fasse $ax = aY = Cb$, les lignes indéfinies CY , Cx , menées par le centre C & les points Y & x , sont appelées *Asymptotes de l'Hyperbole*; les lignes $n\chi'$, nu , ng sont nommées *Ordonnées*, lesquelles sont parallèles à une Asymptote, ou à l'un des axes. Une ligne terminée de part & d'autre à la circonférence de l'Ellipse, en passant par le centre, est appelée *Diamètre de l'Ellipse*, telle est la ligne dD (fig. 12.). De même dans l'Hyperbole (fig. 11.) la ligne Dd , terminée par les Hyperboles opposées & passant par le centre, est un *Diamètre*. Une ligne HCh qui passe par le centre parallèlement à la tangente rd , menée à l'extrémité d d'un autre Diamètre, est appelée *Diamètre conjugué par rapport au Diamètre Dd* , & réciproquement. En général deux Diamètres sont dits conjugués l'un par rapport à l'autre, lorsque l'un est parallèle à la tangente à l'origine de l'autre. Dans l'Ellipse tout Diamètre est terminé par la rencontre du périmètre de l'Ellipse; mais dans l'Hyperbole on détermine le Diamètre conjugué hH en tirant du point d parallèlement aux Asymptotes, les lignes dh , dH jusqu'à la rencontre de hH . Les lignes lm , parallèles à la tangente dt (fig. 12.), ou à la tangente dr (fig. 11.), tirées d'un point l quelconque de la courbe jusqu'à la rencontre du Diamètre, sont dites ordonnées à ce Diamètre. Enfin le paramètre p d'un Diamètre est une troisième proportionnelle à ce Diamètre & à son conjugué; ainsi faisant $dD = 2a$, $hH = 2b$, on aura le paramètre du premier $= \frac{2b^2}{a}$, & celui du second $= \frac{2a^2}{b}$.

43. THÉORÈME. Le rectangle des lignes $d\chi$, $d\chi'$

C 2

(fig. II.) ordonnées aux *Asymptotes* parallèlement au second axe, est égal au carré b^2 du second demi-axe. Les triangles semblables CaY , $CP\zeta$ donnent $a : b :: x : P\zeta = \frac{bx}{a}$; mais $\zeta d = P\zeta - dP = \frac{bx}{a} - y$, & $d\zeta' = P\zeta' + Pd = \frac{bx}{a} + y$; donc $d\zeta \times d\zeta' = \frac{b^2 x^2}{a^2} - y^2 = \frac{b^2 x^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} (x^2 - a^2)$, en substituant la valeur de y^2 ; mais $\frac{b^2 x^2}{a^2} - \frac{b^2 x^2}{a^2} + \frac{b^2 a^2}{a^2} = b^2$; donc, &c. Il est visible aussi que $n\zeta' \cdot n\zeta = bb$.

COROLLAIRE I. De l'équation $d\zeta \times d\zeta' = b^2$, on tire $d\zeta : b :: b : d\zeta'$.

COROLLAIRE II. Donc l'Hyperbole ne rencontre jamais l'Asymptote, quoiqu'elle s'en approche continuellement; en effet $P\zeta = \frac{bx}{a}$, & $\overline{P\zeta^2} = \frac{b^2 x^2}{a^2}$; mais $\overline{Pd^2} = y^2 = \frac{b^2 x^2}{a^2} - \frac{b^2 a^2}{a^2}$; donc $P\zeta$ est toujours plus grande que Pd , c'est-à-dire qu'aucun point d de l'Hyperbole ne peut jamais rencontrer le point correspondant ζ de l'Asymptote. Mais parce que de l'équation $d\zeta \times d\zeta' = b^2$, on tire $d\zeta = \frac{b^2}{d\zeta'}$, & que $d\zeta'$ augmente continuellement à proportion que l'Hyperbole s'éloigne du sommet a , il s'ensuit que $d\zeta$ diminue & que l'Hyperbole s'approche de plus en plus de l'Asymptote $C\zeta$.

44. THÉORÈME. Le produit d'une ordonnée quelconque dy à une Asymptote & parallèle à l'autre Asymptote, par son abscisse Cy , est toujours égal

au produit $aK \times CK$. En effet les triangles aKY , $dy\zeta'$ (semblables parce que $\zeta \& Y$, $y \& K$ sont correspondants) donnent $dy : aK :: \zeta d : aY = Cb :: Cb : d\zeta'$ (Coroll. I. n° 43). Mais les triangles aKY , $di\zeta'$ (semblables parce que leurs côtés sont parallèles) donnent $aY : d\zeta' :: KY : di$; donc $dy : aK :: KY : di$; & $dy \cdot di = aK \cdot KY$; mais à cause du parallélogramme $Cidy$, on a $dy = Ci$. De plus les triangles égaux CbK , aKY^* donnent $aK = YK = CK$; donc $dy \cdot Cy = \overline{CK}^2$.

REMARQUE. Il est visible que $bK = aK$.

COROLLAIRE I. En faisant $CK = c$, $Cy = x$, $dy = y$, l'on aura $x \cdot y = c^2$, équation de l'Hyperbole par rapport aux Asymptotes. La quantité c^2 s'appelle puissance de l'Hyperbole.

COROLLAIRE II. Puisque par la propriété du triangle rectangle Cab , on a $(ba)^2 = b^2 + a^2$, & que $aK = \frac{CY}{2} = \frac{ba}{2}$, l'on aura $\overline{aK}^2 = c^2 = \frac{b^2 + a^2}{4} = \frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{4}$; donc la puissance de l'Hyperbole est égale au quart de la somme des quarrés des demi-axes.

45. THÉORÈME. Le rectangle $ng \times nu$ des ordonnées aux Asymptotes parallèlement au premier axe est $= a^2$. Car les triangles semblables $ng\zeta'$, CaY donnent $ng : n\zeta' :: Ca : aY$. Pareillement les triangles semblables ζun , CaY donnent $nu : n\zeta :: Ca : aY$; donc en multipliant par ordre les termes de ces deux proportions, l'on aura $ng \times nu : n\zeta \times n\zeta' = b^2 (43) :: \overline{aC}^2 = a^2 : \overline{aY}^2 = b^2$;

* Car les triangles CbK , aYK ont deux angles égaux sur les côtés égaux aY , Cb ; donc, &c.

donc $ng.nu : a^2 :: b^2 : b^2$; donc $ng.nu = a^2$.

46. THÉORÈME. Si l'on tire une ligne quelconque rR d'une Asymptote à l'autre à travers une Hyperbole, les parties rn , Ro comprises entre chaque Asymptote & l'Hyperbole seront égales entr'elles (fig. 13.). Car les triangles rnz , rou (semblables à cause des parallèles zn , ou) donnent $rn : nz :: ro : ou$. Mais les triangles RoV , Rnz' semblables à cause des parallèles oV , nz' , donnent $Rn : nz' :: Ro : oV$. Multipliant ces proportions par ordre, l'on a $rn \times nR : nz \times nz' :: ro \times oR : vo \times Vo$; mais (43.) $zn \times nz' = b^2 = vo \times oV$; donc $rn \times nR = ro \times oR$, ou $rn \times (no + Ro) = ro \times Ro = (rn + no) \times Ro$, ou $rn \times no + rn \times Ro = rn \times Ro + no \times Ro$. En effaçant de part & d'autre la quantité $rn \times Ro$, il reste $rn \times no = Ro \times no$; donc (en divisant par no) $rn = Ro$; donc, &c.

COROLLAIRE I. Donc une tangente mt terminée aux Asymptotes est divisée en deux parties égales au point de contact d . Car $dt = dm$, à cause que la ligne mt ne rencontre la courbe qu'au seul point d , & que les parties dt , dm comprises entre la courbe & les Asymptotes sont égales ainsi que nous venons de le voir.

COROLLAIRE II. Donc étant données les Asymptotes Ct , Cz & un point n dans l'angle zCt , on pourra décrire une Hyperbole qui passe par le point donné n . Car en tirant les lignes rnR , znz' , &c. & prenant $oR = rn$, $dz' = zn$, &c. les points d , o , &c. appartiendront à la courbe. On pourra se servir des points d & o comme du point n , pour trouver d'autres points de la courbe, desquels on fera le même usage.

47. THÉORÈME. Les produits des lignes $rn \times nR$, $xp \times py$, &c. tirées d'un point quelconque de la courbe parallèlement à la tangente sont égaux entr'eux & au carré de $md = dt = t$. Les triangles semblables rnz , xpu donnent $zn : up :: rn : xp$; & à cause des triangles semblables $nz'R$, pVy l'on a $nz' : pV :: nR : py$. Donc en multipliant ces deux proportions, $zn \times nz' : px \times pV :: rn \times nR : xp \times py$. Mais selon ce que nous avons dit ci-dessus $zn \times nz' = b^2 = pu \times pV$; donc $rn \times nR = xp \times py$; & lorsque le point n se confond avec le point d , c'est-à-dire lorsque rR devient tangente, l'on a $xp \times py = md \times dt = t \times t = t^2$.

48. THÉORÈME. Le Diamètre hH conjugué au Diamètre dD , est égal à la tangente sdr menée par l'origine d du Diamètre dD & terminée aux Asymptotes (fig. 11). Les triangles Hhd , $Cr s$ semblables (parce qu'ils ont tous leurs côtés parallèles) sont égaux, ayant deux angles égaux sur deux côtés égaux hd , Cr ; donc $sdr = hH$. D'ailleurs $hC = dr$ à cause du parallélogramme $hdCr$; donc $sd = CH$.

On peut démontrer cela de cette autre manière. Le parallélogramme $CHds$ donne $sd = CH$. Le parallélogramme $drCh$ donne $dr = Ch$; donc $sr = hH$.

COROLLAIRE I. Puisque $sd = dr$; donc $hC = CH$. C'est-à-dire qu'un Diamètre conjugué quelconque de l'Hyperbole est divisé en deux parties égales par le centre C de l'Hyperbole. Mais d'ailleurs il est évident qu'en prenant $Ap = aP$ ou $CP = Cp$ les triangles rectangles PdC , CDp sont égaux & semblables; donc dCD est une ligne

droite, & $Cd = CD$; donc tous les Diamètres de l'Hyperbole sont divisés en deux également par le centre C.

49. THÉORÈME. Dans l'Ellipse & l'Hyperbole (fig. 14 & 15.) tout Diamètre hH , parallèle à une tangente mt , coupe le plus grand rayon vecteur Fm , de manière que $mi = aC = a$. En effet menant fp parallèle à mt , le triangle pmf sera isocelle, puisque les angles fmt , pmo égaux entr'eux (36.) sont égaux à leurs alternes internes mfp , mpf ; donc $mf = mp$. De plus les triangles Ffp , FCi semblables (à cause des parallèles fp , Ci) donnent $Ff(2c) : FC(c) :: Fp : Fi$; donc $Fp = 2Fi$, & $Fi = ip$. Mais dans l'Ellipse $Fm + fm$, ou $2pi + 2pm = 2a$; donc $pi + pm$, ou $mi = a$. Dans l'Hyperbole $Fm - fm = 2a$, ou $Fm + mp - fm - mp = Fp - 2mp = 2a = 2pi - 2mp$; donc $a = pi - mp = mi$; donc, &c.

50. THÉORÈME. Dans une Ellipse (fig. 16.) le triangle Pmt fait par une tangente, sous-tangente & ordonnée correspondantes, est égal au trapeze $armP$, formé par l'abscisse aP , l'ordonnée Pm , la tangente au sommet & une droite Cmr qui passe par le point touchant m & par le centre. Car puisque (40.) $CP : Ca :: Ca : Ct$, & que $CP : Ca :: Pm : ar$ (à cause des parallèles Pm , ar qui rendent semblables les triangles CPm , Car), l'on a $Ca : Ct :: Pm : ar$, & $Ca \times ar = Pm \times Ct$, ou $\frac{Ca \times ar}{2} = \frac{Pm \times Ct}{2}$; or ces quantités sont égales aux triangles Cmt , Car ; donc si de ces deux triangles égaux on retranche la partie commune PmC , l'on aura $tPm = mPar$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I. Donc un triangle qlu dont un côté ql est une ordonnée à l'axe, l'autre côté une ordonnée au Diametre mM & terminée à l'axe en u , & dont le troisième côté est la partie de l'axe comprise entre son ordonnée & la rencontre de l'ordonnée au diamètre, sera toujours égal au trapeze correspondant $qkra$. En effet les triangles Pmt , qlu semblables (à cause des angles droits en q & en P , & des angles correspondants u & t égaux) donnent $mPt : qlu :: \overline{pm}^2 : \overline{ql}^2 * :: \overline{Ca}^2 - \overline{Cp}^2 : \overline{Ca}^2 - \overline{Cq}^2$ (par la propriété de l'Ellipse (28)) $:: Pmra : qkra$ (parce que les différences des triangles semblables Cra , Cpm , Cra , Cqk sont dans le rapport des différences des carrés des côtés homologues); donc $Pmt : qlu :: Pmra : qkra$; mais $mPt = Pmra$; donc $qlu = arqk = qkmt$, en retranchant $armP$ & ajoutant la quantité égale $t m P$.

COROLLAIRE II. Donc le triangle lok est égal au trapeze correspondant $mout$. Car nous venons de voir que $qlu = qkmt$; donc en retranchant la partie commune $qkou$, on aura $lok = mout$.

COROLLAIRE III. Il suit de-là que $CND = Cmt *$; or $CND = Cnd$ à cause de la symmé-

(*) Car lorsque lok devient NCD , $mout$ devient évidemment mCt . Pour comprendre comment lok devient NCD , il n'y a qu'à concevoir que la ligne lu , dont un point l est toujours sur la courbe & le point u sur l'axe Aa (prolongé s'il le faut) descende parallèlement à elle-même, jusqu'à ce qu'elle se confonde avec la ligne NC ; alors la ligne lk , terminée par le diamètre mM prolongé s'il le faut, & l'extrémité l de la ligne ul deviendra ND .

trie * de l'Ellipse qui en supposant $Cz' = CZ$, donne $Cz'N = Cz'n$, $Cz'D = Cz'd$ & $z'N = zn$; donc $Cnd = Cmt$.

§1. THÉORÈME. Dans l'Ellipse le carré d'une ordonnée lo (y) au Diamètre mM ($2a$) est au produit des abscisses $mo \times oM$ ($a^2 - xx$) comme le carré du demi-Diamètre conjugué (b) au carré du demi-Diamètre mC (a). Car si l'on tire nd parallèle à lk , les triangles ndC , lok seront semblables, parce qu'ils ont les angles en k & d alternes-internes, & de plus l'angle l du second est égal à son alterne $lQC = dnC$, son correspondant; donc $\overline{lo}^2 : \overline{nC}^2 :: lok : nCd$; or les triangles semblables Cmt , Cou donnent $\overline{cm}^2 : \overline{co}^2 :: Cmt : Cou$, & (dividendo) $\overline{cm}^2 - \overline{co}^2 : \overline{cm}^2 :: Cmt - Cou = mout : Cmt :: lok : nCd$ (à cause de $lok = mout$, & de $nCd = Cmt$ (50.)) $:: \overline{lo}^2 : \overline{nC}^2$; donc $\overline{cm}^2 - \overline{co}^2$, ou $\overline{cm} + \overline{co} \times \overline{cm} - \overline{co} = a + x \times a - x$ (en faisant $\overline{co} = x$) $= a^2 - x^2 : \overline{cm}^2 = a^2 :: \overline{lo}^2 = y^2 : \overline{nC}^2 = b^2$, ou (mettant la première raison à la place de la seconde & alternando) $y^2 : a^2 - x^2 :: b^2 : a^2$ **.

* Cette symétrie fait que les parties m de la courbe sont situées d'un côté de l'axe de la même manière que les parties correspondantes & opposées M le sont de l'autre côté du même axe.

** On peut démontrer cela d'une autre manière plus aisée. Si on conçoit qu'un cercle $AYaB$ tourne sur le Diamètre Aa jusqu'à ce que son plan fasse un angle quelconque, par exemple de 30 degrés avec le plan $AQN aM$, & qu'ensuite on mène de tous les points de la circonférence du cercle des perpendiculaires FQ sur ce dernier plan, la ligne $AQaM$ par laquelle passeront toutes ces perpendiculaires sera une Ellipse (fig. 16 A.). En effet il est visible qu'ayant

52. THÉORÈME. *C'est la même chose dans l'Hyperbole (fig. 11)* En effet les triangles semblables Cdr , $Cm'm'$ donnent $Cd(a) : dr = hC(b) ::$

$$Cm(x) : m'm' = \frac{bx}{a}, \text{ \& faisant } mo = ml = y,$$

$$\text{on a } m'o = \frac{bx}{a} - y; \text{ \& } of = fm + mo = \frac{bx}{a}$$

$$+ y; \text{ donc } om' \times of = \frac{b^2 x^2}{a^2} - y^2 = b^2 \text{ (à cause}$$

$$\text{de } om' \times of = (rd)^2 = b^2 \text{ (47) , \& en transpo}$$

$$\text{fant il vient } \frac{b^2 x^2}{a^2} - b^2 = y^2, \text{ où } \frac{b^2 x^2 - b^2 a^2}{a^2} = y^2;$$

$$\text{d'où l'on tire } y^2 : x^2 - a^2 :: b^2 : a^2.$$

mené les lignes FD , QD , l'une dans le plan du cercle, l'autre dans le plan de la figure $AQaM$, & perpendiculaires à l'intersection Aa de ces plans, l'on aura $FD : DQ :: r : \cos. FDQ :: a : b$, en faisant le cosinus de l'angle de ces plans $= b$ & le rayon $= a$; donc toutes les ordonnées du cercle seront à toutes les ordonnées correspondantes de la figure $AQaM$ dans un rapport constant de $a : b$, ou de $CT : Ct$, en faisant $CT = a$ & $Ct = b$, ou du demi-grand-axe CA au demi-petit-axe Ct , ce qui convient parfaitement à l'Ellipse (34). La figure $AQaM$ formée par les extrémités des perpendiculaires FQ , $f q$, &c. abaissés de la circonférence du cercle sur un plan qui lui est incliné, s'appelle *Projection orthographique* de ce cercle. C'est pourquoi la projection orthographique d'un cercle sur un plan qui lui est incliné est une ellipse.

Il est encore évident que si des extrémités & du milieu d'une corde xu , on mène des perpendiculaires xS , ZV , us sur le plan de la figure $AQSaM$, les lignes Ss , xu & SV , xZ seront entre elles dans un rapport constant; c'est-à-dire, que si Ss est, par exemple, la moitié de xu , SV sera aussi la moitié de xZ . De même Qq parallèle à Ss , & projection du Diamètre Ff sera la moitié de ce diamètre.

Tome II.

**

REMARQUE. Nous avons supposé dans le dernier Théorème que $mo = ml$, ce qui est évident; car Cdm coupant sr en deux également en d doit couper sa parallèle fm' en deux également en m . Mais d'ailleurs (45) $lf = om'$; donc $mo = lm$. Nous avons supposé aussi dans l'avant dernier Thé-

En général toutes les ordonnées, & doubles ordonnées de l'Ellipse parallèles entr'elles, seront dans un rapport constant avec les ordonnées & doubles ordonnées correspondantes dans le cercle.

Il suit de-là que Qq , MN étant deux Diamètres conjugués, les carrés $(SV)^2$ $(y)^2$ des ordonnées au second sont entr'eux comme les produits $NV \times MV$ des abscisses correspondantes. En effet toutes les ordonnées SV , QC (car cette ligne est une ordonnée qui passe par le centre), parallèles entr'elles, sont plus petites que les ordonnées xZ , FC du cercle dont elles sont les projections, & plus petites dans un rapport constant. De même les lignes NV , VC , $CN = CM$, & VM sont plus petites que les lignes YZ , CZ , CY , ZB dont elles sont les projections, & cela dans un rapport constant. Mais dans le cercle les carrés des ordonnées xZ sont égaux aux produits $ZB \times ZY$ des abscisses; donc dans l'Ellipse les carrés des ordonnées SV sont aux produits des abscisses $NV \times VM$ dans un rapport constant. Si, par exemple, dans l'Ellipse les carrés des ordonnées elliptiques sont la moitié des carrés des ordonnées circulaires correspondantes, & que les produits des abscisses dans l'Ellipse soient le quart de ceux du cercle, les carrés des ordonnées de l'Ellipse seront le double des produits de leurs abscisses; en général l'on aura $(SV)^2 : NV \cdot VM :: (QC)^2 : NC \cdot CM$, ou $y^2 : aa - xx :: bb : aa$; en faisant $SV = y$, $CV = x$, $MN = za$, & par conséquent $MV = a + x$, $NV = a - x$, $QC = b$. Donc $y^2 = \frac{bb}{a^2} (aa - xx)$. Cette méthode est aussi simple qu'élégante.

rême que tous les Diamètres de l'Ellipse étoient partagés en deux parties égales par le centre ; or c'est ce qui est évident , car en tirant (fig. 16.) l'ordonnée MF & supposant $CF = CP$, l'on aura par la propriété de l'Ellipse $Pm = FM$, & les triangles rectangles CFM , CPm auront deux côtés égaux , par conséquent leurs hypothénuses seront égales ; donc ces triangles auront tous leurs côtés égaux aussi - bien que leurs angles ; donc mCM sera une ligne droite , & le Diamètre mM fera divisé en deux parties égales en C .

COROLLAIRE I. Il suit de ces Théorèmes que $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{(a^2 - x^2)}$ dans l'Ellipse , & $y = \pm \frac{b}{a} x \sqrt{(x^2 - a^2)}$ dans l'Hyperbole ; donc à chaque ordonnée positive il répond une ordonnée négative égale ; donc dans l'Ellipse $lo = io$, & dans l'Hyperbole (fig. 11.) $lm = mo$. Ce que nous savions déjà pour l'Hyperbole.

COROLLAIRE II. Puisque l'équation aux Diamètres est la même que l'équation aux axes , il est aisé de voir que l'équation par rapport aux Paramètres & aux Diamètres conjugués sont les mêmes que pour les axes , & que les propriétés des Diamètres sont les mêmes que les propriétés des axes en tout ce qui ne regarde pas les foyers.

COROLLAIRE III. Si l'on suppose l'abscisse $x = 0$, on aura pour l'Ellipse $y = \pm b$; mais en supposant $x = a$ dans l'Hyperbole , on a $y = 0$; donc l'Hyperbole passe par les extrémités d , D du Diamètre dD .

53. THÉORÈME. Si des extrémités n , M (fig. 16.) des deux Diamètres conjugués on mene les ordonnées mP , $n\chi$ au grand axe d'une Ellipse , le carré

d'une des abscisses Cx comprise entre le centre C & une des ordonnées, est égal au produit des abscisses $AP \times Pa$ de l'autre ordonnée. Car supposant $n\zeta = x$, les triangles Pmt , $n\zeta C$ semblables à cause des angles alternes internes nCP , mtC & des angles droits ζ & P , donnent $\overline{tP}^2 : \overline{C\zeta}^2 :: \overline{Pm}^2 : \overline{\zeta n}^2$, ou en faisant $tP = S$, $C\zeta = u$, $S^2 : u^2 :: y^2 : \zeta^2 :: a^2 - x^2 : a^2 - u^2$; donc $S^2 : u^2 :: a^2 - x^2 : a^2 - u^2$; donc (en mettant Sx à la place de $a^2 - x^2$ (40.) & alternando) $S^2 : Sx :: u^2 : a^2 - u^2$. Ou en divisant les deux termes de la première raison par S & les multipliant par x , $Sx : x^2 :: u^2 : a^2 - u^2$, & en composant, $Sx : x^2 + Sx :: u^2 : a^2$, ou alternant, $Sx : u^2 :: x^2 + Sx : a^2$; mais $a^2 = x^2 + Sx$ (ce qui se déduit facilement de l'équation (40.) $Sx = a^2 - x^2$); donc $u^2 = Sx = a^2 - x^2$, & $x^2 = a^2 - u^2$.

COROLLAIRE I. Parce que de l'équation à l'Ellipse $y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2)$ on peut tirer $\frac{a^2 y^2}{b^2} = a^2 - x^2$, en multipliant par a^2 & divisant par b^2 , il est évident que pour l'ordonnée $n\zeta$ (ζ) on aura $\frac{\zeta^2 \times a^2}{b^2} = a^2 - u^2 = x^2$, d'où l'on tire $b^2 x^2 = \zeta^2 a^2$, ou $bx = \zeta a$.

COROLLAIRE II. Ayant tiré CY perpendiculairement sur mt , les triangles $C\zeta n$, $\triangle CY$, semblables parce qu'ils ont un angle droit chacun, & les angles en C & t égaux, puisqu'ils sont alternes internes, donnent $nC : n\zeta :: Ct \left(\frac{a^2}{x} \right)$ (40.) :

CY ; donc $Cn \times CY = \frac{\zeta \cdot a^2}{x}$; mais $a\zeta = bx$; donc $Cn \times CY = ab$; or en tirant ns parallèle

à Cm , on aura le parallélogramme $mCns$ fait sur les demi-Diamètres conjugués $= Cn \times CY^* = ab$; donc le parallélogramme fait sur les demi-Diamètres conjugués de l'Ellipse est égal au rectangle des demi-axes; & par conséquent le parallélogramme des deux diamètres conjugués quelconques sera toujours égal au rectangle des axes.

COROLLAIRE III. Si le point γ tombe sur le point P , les ordonnées y & γ seront égales, & les demi-Diamètres conjugués Cm , Cn étant les hypoténuses des triangles rectangles égaux CPm , $Cn\gamma$, seront égaux, & l'on aura $CP = C\gamma$, ou $x = u$, & $x^2 = u^2$. Substituant cette valeur de u^2 dans l'équation $u^2 = a^2 - x^2$ (Théorème précédent), l'on a $x^2 = a^2 - x^2$, ou $x^2 + x^2 = a^2$, ou $2x^2 = a^2$; d'où l'on tire $x^2 = a \times \frac{a}{2}$ & $a : x :: x : \frac{a}{2}$.

Ainsi prenant CP moyenne proportionnelle entre la moitié & le quart de l'axe, & faisant passer une double ordonnée par le point P , cette ligne déterminera les deux points par lesquels & le centre C on menera deux Diamètres conjugués égaux. De plus parce qu'il n'y a de chaque côté du centre C qu'un seul point qui donne $a : x :: x : \frac{a}{2}$, & que chacun de ces points donne les mêmes Diamètres, il est évident qu'il n'y a dans l'Ellipse que deux diamètres conjugués égaux.

Au reste si sur le grand axe de l'Ellipse on fait au centre C un angle mCP de 45° , & qu'on tire l'ordonnée mP à l'axe, on aura un des

* Car la surface d'un parallélogramme est égale au produit de sa base Cn par sa hauteur CY .

Diametres conjugués égaux de l'Ellipse. En effet supposant l'angle mCP de 45° , le triangle CPm sera isocèle à cause de l'angle $mCP = 45^\circ$; donc $\overline{Cm}^2 = \overline{CM}^2 = a^2 = \overline{CP}^2 + \overline{Pm}^2 = x^2 + x^2$ (à cause de $Pm = CP = x$); donc $a^2 = 2x^2$; donc $x^2 = \frac{a^2}{2}$; donc $a : x :: x : \frac{a}{2}$; donc, &c.

On trouvera l'autre Diametre en faisant l'angle $nCP = 45^\circ$.

COROLLAIRE IV. Il suit de-là que l'équation aux Diametres conjugués de l'Ellipse $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, en faisant $Cm = a$, $Cn = b$, se réduit à $y^2 = a^2 - x^2$, dans la supposition des deux Diametres conjugués égaux; or cette équation est la même que celle du cercle; donc l'on ne peut être sûr que cette équation appartienne au cercle, à moins qu'on ne sache si les ordonnées sont perpendiculaires au Diametre. Dans le cas contraire l'équation est à l'Ellipse par rapport à ses Diametres conjugués égaux.

54. THÉORÈME. Dans l'Hyperbole (fig. 11.) le parallélogramme des Diametres conjugués est égal au rectangle des axes. Car (44.) $CK = aK = c$, & $Cy \cdot dy = x \cdot y = c^2$ (44.) $= CK \times aK$, ce qui donne $CK : Cy :: yd : aK$; donc les triangles CaK , Cyd ont les côtés qui comprennent les angles K & y (égaux à cause des parallèles aK , dy *) réciproques; or si par d & a , on conçoit tirées les perpendiculaires dt' , at sur les bases

* Car à cause du parallélogramme $Cbax$, l'on a Ka parallèle à Cx ; or dy est aussi parallèle à l'Asymptote Cx ; donc, &c.

de ces triangles, les triangles $t'y d$, $t a K$ auront un angle droit en t' & t , & de plus les angles en y & K égaux, ce qui les rend semblables; donc $y d : a K :: d t' : a t$; donc $CK : Cy :: d t' : a t$; & $CK \times a t = Cy \times d t'$; or $CK \times a t$ est égal au triangle $C a Y$ double de $a C K$ (à cause du sommet commun a & de $CY = 2 CK$ (48)). De même $Cy \times d t'$ est double du triangle $Cy d = d C i$; donc il est égal au triangle $C d r$, double de $C d i$, à cause de $C i = i r$ (car les triangles $r C s$, $r d i$ donnent $r C : r i :: r s : r d$; mais $r d = \frac{r s}{2}$; donc

$r i = C i = d y$); donc le rectangle $C b Y a$ des demi-axes, double du triangle $C a Y$, est égal au parallélogramme $C h d r$ fait sous les demi-Diamètres conjugués $C h$, $C d$; donc le rectangle des axes est égal au parallélogramme des Diamètres conjugués, ce qu'il falloit démontrer.

55. DEFINITIONS. Si par un point r d'une courbe quelconque on fait passer un cercle $m r p$ dont le centre n soit situé sur la ligne $r n$ * perpendiculaire à la courbe (fig. 18.), qui ait en ce point la même tangente que la courbe & tel qu'un cercle décrit avec un plus grand rayon passe au-dessus, tandis que le cercle décrit d'un plus petit rayon passe au-dessous d'un petit arc de la même courbe pris de part & d'autre du point r , ce cercle s'appelle *cercle osculateur*, son rayon est dit *rayon de courbure* (parce que ce cercle a la même courbure que le petit arc de la courbe dont nous venons de parler), rayon du cercle osculateur, rayon de la développée.

56. LEMME. *Le sinus versé $pa = x$ d'un arc éva-*

* On n'a pas décrit le cercle entier, pour ne pas embrouiller la figure.

nouissant (ou infiniment petit) ma , est égal au carré de l'ordonnée divisé par le Diamètre (fig. 17.); car $\overline{pm} = y^2 = pa \times pA = x \times (2m - x)$, en faisant le Diamètre du cercle $= 2m$; donc $x = \frac{y^2}{2m - x} = \frac{y^2}{2m}$. Parce que x étant une quantité infiniment petite, on peut, supposer $2m - x$, ou $Ap = Aa$.

57. THÉORÈME. Dans l'Ellipse & l'Hyperbole (fig. 18 & 19.) faisant le Diamètre $rg = 2g$, son conjugué $hH = 2h$, le rayon vecteur $fr = r$, le rayon de courbure rn au point $r = m$, la perpendiculaire rq au diamètre $hH = q$, la perpendiculaire ft abaissée du foyer f sur la tangente $= t$, l'ordonnée lx , $lx = y^*$. La ligne rx (sinus verse de l'arc lr) $= y$. Je dis que le rayon de courbure m est $= \frac{h \cdot h}{q}$. Les triangles rxz , rCq semblables, parce que hH est parallèle à lx (41.) ordonnée au diamètre rg , donnent $rx(x) : rz\left(\frac{y^2}{2m}\right)$, Lemme précédent, $\therefore rC(g) : rq(q)$, d'où l'on tire $x \cdot q = \frac{g \cdot y^2}{2m}$, multipliant par m & divisant par $x \cdot q$ il vient $m = \frac{g \cdot y^2}{2q \cdot x}$; or $y^2 : 2g \cdot x \mp x^2$ (en comptant les abscisses depuis l'origine du Diamètre, & prenant le signe $-$ pour l'Ellipse & le signe $+$ pour l'Hyperbole) $\therefore h^2 : g^2$, ou en négligeant x^2 **, $y^2 : 2g \cdot x \therefore h^2 : g^2$, d'où

* Ces lignes ne diffèrent entr'elles que d'une quantité infiniment petite par rapport à elles; ainsi on peut les supposer égales.

** Parce que x^2 est un infiniment petit du second ordre, qu'on néglige devant $2gx$ infiniment petit du premier ordre.

l'on tire $y^2 = \frac{2g \times h^2}{g^2}$. Substituant cette valeur de y^2 dans la valeur de m & réduisant il vient $m = \frac{h \cdot h}{q}$; donc, &c.

COROLLAIRE I. Puisque h, q , c'est-à-dire le parallélogramme des demi-Diamètres conjugués est $= a \cdot b$ dans l'Ellipse & l'Hyperbole, ainsi que nous l'avons vu ci-dessus, l'on a $h = \frac{a \cdot b}{q}$, $h^2 = \frac{a^2 \cdot b^2}{q^2}$.

Substituant cette valeur dans $m = \frac{h \cdot h}{q}$, l'on aura $m = \frac{a^2 \cdot b^2}{q^3}$.

COROLLAIRE II. Les triangles rft , rdq semblables, à cause des angles droits t & q , & des angles alternes internes en d & r dans l'Ellipse, tandis que dans l'Hyperbole $qdr = drt$ (son alterne interne) $= trf$ (36.), donnent $rq(q) : rd = a$ (49.) $\therefore ft(t) : rf(r)$, ou $q : a :: t : r$; donc $q = \frac{a^2}{r}$, & $q^3 = \frac{a^3 t^3}{r^3}$; donc en divisant $a^2 b^2$ par cette valeur de q^3 , l'on aura $m = \frac{a^2 \cdot b^2}{\frac{a^3 t^3}{r^3}} = \frac{b^2 \cdot r^3}{a \cdot t^3} = \frac{r^3}{2} \times \frac{b^2}{t^3}$, parce que $\frac{b^2}{a}$ est la moitié du paramètre, ainsi qu'on l'a vu ci-dessus.

COROLLAIRE III. Puisque $h \cdot q = a \cdot b$, l'on a $q = \frac{a \cdot b}{h}$; & divisant $h \cdot h$ par $\frac{a \cdot b}{h}$, il vient $m = \frac{h^3}{q} = \frac{h^3}{\frac{a \cdot b}{h}}$.

COROLLAIRE IV. Si du centre C d'une Ellipse ou d'une Hyperbole (fig. 21 & 22.) on abaisse sur la tangente rt la perpendiculaire Cn , & du point r la normale rE , les triangles CnT , ErP rectangles l'un en P l'autre en n , ayant de plus les

angles en E & T égaux (parce qu'ils sont complémens de l'angle ϵ dans l'Ellipse, & complémens l'un de l'angle $C \epsilon n$, l'autre de l'angle $r \epsilon E$ dans l'Hyperbole, lesquels angles sont égaux étant opposés au sommet), sont semblables ; donc $Cn = rq$ (à cause des paralleles entre paralleles) : $CT :: rP = Cp : rE$; donc $rq \times rE = Cp \times CT$; mais $Cp \times CT = b^2$; puisque $Cp : Cb :: Cb : CT$; donc $rE = \frac{b^2}{q}$, & $q = \frac{b^2}{rE} = \frac{b^2}{M}$, en faisant la normale $rE = M$; & enfin $q^3 = \frac{b^6}{M^3}$.

COROLLAIRE V. Substituant cette valeur de q^3 dans la formule $m = \frac{a^2 \cdot b^2}{q^3}$, l'on a $m = \frac{M^3 \cdot a^2}{b^4}$.

COROLLAIRE VI. Il suit du Théorème & des Corollaires précédents que $m = \frac{h^2}{q} = \frac{a^2 \cdot b^2}{q^3} = \frac{p}{2} \times \frac{r^3}{t^3} = \frac{h^3}{ab} = \frac{M^3 \cdot a^2}{b^4}$; donc pour un autre rayon de courbure N par rapport à un autre point, l'on aura $N = \frac{H^2}{Q} = \frac{a^2 \cdot b^2}{Q^3} = \frac{p}{2} \times \frac{R^3}{T^3} = \frac{H^3}{ab} = \frac{M'^3 \cdot a^2}{b^4}$; donc $m : N :: \frac{h^2}{q} : \frac{H^2}{Q} :: \frac{a^2 \cdot b^2}{q^3} : \frac{a^2 \cdot b^2}{Q^3} :: \frac{p}{2} \times \frac{r^3}{t^3} : \frac{p}{2} \times \frac{R^3}{T^3} :: \frac{h^3}{ab} : \frac{H^3}{ab} :: \frac{M^3 \cdot a^2}{b^4} : \frac{M'^3 \cdot a^2}{b^4}$; & en divisant les valeurs correspondantes de m & N par leur multiplicateur commun entier ou fractionnaire, on verra que

* Car l'expression $\frac{b^2}{q}$ (41.) donne $y : b :: b : CT$, ou $Cp : Cb :: Cb : CT$.

les rayons de courbure sont entr'eux comme les quarrés des demi-axes conjugués correspondants, divisés par les perpendiculaires abaissés sur ces demi-axes, comme $\frac{1}{q^3}$, $\frac{1}{Q^3}$, c'est-à-dire, en raison inverse, du cube de ces perpendiculaires, comme les cubes des rayons vecteurs divisés par les cubes des perpendiculaires abaissées du foyer, d'où part le rayon vecteur sur la tangente, & comme les cubes des normales tirées du point de contact jusqu'à la rencontre de l'axe.

58. THÉORÈME. Dans la parabole (fig. 20.)

on aura $m = \frac{2 \cdot r^2}{t} = \frac{2a \cdot r^3}{t^3}$ (a est le quart du pa-

rametre). En effet le triangle urx est isocelle à cause des angles en x & u égaux à leurs alternés mrx , fro ; or ces derniers angles sont égaux entr'eux (10.); donc le triangle urx est isocelle & donne $rx = ru$. Maintenant les triangles $rf t$, rxu étant rectangles en t & x ; & ayant les angles en u & r alternés internes sont semblables & donnent $ru = rx (x) : x r \left(\frac{y^2}{2m} \right) :: fr (r) : ft (t)$,

d'où l'on tire $x \cdot t = \frac{r y^2}{2m}$, ou en multipliant par

m & divisant par $x \cdot t$, $m = \frac{y^2 \cdot r}{2x \cdot t}$; or (par le n° 17.)

$y^2 = x \cdot P$, & $P = 4r$, ou 4 fois la distance de l'origine du Diametre à la directrice (1.); donc $m =$

$\frac{4r^2 \cdot x}{2x \cdot t} = \frac{2 \cdot r^2}{t}$. Mais (par le n° 14.) $ft^2 = t^2 =$

$fa \times fT = fa \times fr$ (par le n° 10.); ou $t^2 = a \cdot r$; donc en multipliant par $a \cdot r$ & divisant

D 3

par t^3 , l'on aura $m = \frac{1 \cdot r^2}{t} = \frac{1 \cdot r^2 \times a \cdot r}{t \times t^2} = \frac{1 a \cdot r^3}{t^3}$.

COROLLAIRE I. Donc les rayons de courbure dans la parabole sont entr'eux comme les quarrés des rayons vecteurs divisés par les perpendiculaires abaissées du foyer sur les tangentes aux points où aboutissent ces rayons, & comme les cubes de ces mêmes rayons divisés par les cubes des perpendiculaires correspondantes.

Après avoir parlé des propriétés des Sections Coniques, par rapport à leurs axes & leurs diamètres, il nous reste à parler de leur surface, & de leur description. Quant à la surface de la parabole, nous l'avons déjà trouvée (21.). Nous avons vu aussi (34.) que celle de l'Ellipse dépend de la quadrature du cercle; mais l'on n'a pu jusqu'ici trouver que par approximation celle de l'Hyperbole, en se servant même du calcul intégral. Nous en parlerons dans la seconde Partie de cet Ouvrage. Passons donc à la description des Sections Coniques, & comme nous savons déjà décrire la parabole (18.), nous allons donner la méthode de décrire l'Ellipse & l'Hyperbole.

39. PROBLÈME. *Décrire une Ellipse* (fig. 24.). Attachez en f & F les extrémités d'un fil $f m F = A a > f F$, & faisant tourner le stile m en tenant toujours le fil rendu, on décrira une Ellipse. En effet la somme des lignes menées du point m à chaque foyer sera par-tout égale à la longueur du fil ou au grand axe $A a$; donc (23.) la courbe décrite est une Ellipse. Si la distance des foyers $f F$ devient 0, c'est-à-dire si f tombe sur F , la courbe sera un cercle. Pour l'Hyperbole (fig. 23.), attachez le bout F , d'une règle $m F$ mobile en F , en-

forte qu'elle puisse tourner autour de F , & en f le bout d'un fil $f m D$, dont l'autre bout soit attaché à celui de la règle $F m$. Si la différence des longueurs de la règle & du fil est égale à l'axe $A a$, il est évident que le stile m qui tient le fil tendu, & sa partie $m D$ collée contre la règle, décrira par son mouvement l'Hyperbole $a m$; puisqu'on aura toujours $F m - m f = A a$ propriété (23.) de l'Hyperbole.

On peut aussi décrire l'Ellipse & l'Hyperbole de cette autre manière. Ayant pris (fig. 24 & 25.) $F d$ égal au premier axe & du foyer F comme centre, avec les rayons $F n$, $F n$, &c. pris à discrétion, décrit des arcs $m n m$, & du point f avec un rayon $f m$ égal à la ligne correspondante $d n$, décrivant des arcs qui coupent les premiers en m , m , les points m , m seront dans la courbe. Car $F m = F d + d n$, * par construction, ou $F m + d n = F m + f m = F d$; or $F d$ est égal au premier axe; donc, &c.

REMARQUE. Dans l'Ellipse le rayon $F n$ ne peut être plus grand que $F a$, & dans l'Hyperbole l'on ne peut faire $F n < F a$, autrement les arcs décrits des points F , f ne se rencontreroient pas; mais dans la supposition de $F n = F a$, ces arcs se touchent en a .

60. PROBLÈME GÉNÉRAL. *Décrire les Sections Coniques, Parabole, Hyperbole & Ellipse par une même méthode* (fig. 26, 27 & 28.). Sur une ligne indéfinie $a s$ élevez la perpendiculaire $s b$, par le point a & le point b tirez la ligne $a b d$, faites

* Le signe supérieur est pour l'Ellipse, & l'inférieur pour l'Hyperbole.

$sf = sb$, & ayant mené tant de droites pd , pd que l'on voudra perpendiculairement à l'axe sp ; du point f , comme centre, avec un rayon égal à pd , décrivez un petit arc qui coupe cette pd en m , le point m sera à une section conique. En effet si par le point a on mène ag perpendiculaire à as (que nous appellerons la *Directrice*), à cause du triangle asb isocelle dans la figure 26, l'on aura chaque pd égale à sa correspondante $fm = pa = mg$; donc dans ce cas la courbe est une parabole (1.). Si as est plus grande que sb , l'on aura l'Ellipse. Car si par le point f l'on tire la ligne fh , faisant un angle de 45° avec sS , & que du point h où cette ligne rencontre la ligne ab , on tire la ligne hSB (fig. 27.), le point S appartiendra à la courbe. En effet $fS = Sh$ à cause du triangle isocelle hSf . De plus il est visible qu'en prenant $SA = sa$, & $SB = sb$, & tirant la ligne ABD , les pD croissent autant en s'éloignant de S , que les pD en s'éloignant de s ; de manière que deux pD , pD ; dont l'une est autant éloignée de S , que l'autre l'est de s sont égales, & leur somme est une quantité constante; or $hS + BS = fS + sb = fS + fs = sS$; donc $fm + Fm$ (en supposant $FS = fs$), $= pnd + pMD = sS^*$, c'est-à-dire la somme des distances d'un point m aux foyers de la courbe est égale au premier axe sS ; donc (23.) la courbe décrite est une Ellipse. Si as est plus petite que sb (fig. 28.), en tirant fh de manière que l'angle sfh soit de 45° , on verra aisément que $hS = fS$, & que le point S appar-

* Ce qui est visible en prenant $SA = sa$ & SA pour directrice.

tient à la courbe décrite. Faisant $FS = fs$, $AS = as$, $SB = sb$, & tirant la ligne indéfinie AB , on prouvera facilement que chaque Fn étant prise égale à pD , tandis que chaque fn correspondante est égale à chaque pd correspondante, on a toujours $pd - pD = Dd = fn - Fn$; or lorsque le point n tombe en S , l'on a $fn - FS = FS - fs = Ss$; c'est-à-dire que la courbe Sn est telle que la différence des distances de chacun de ses points aux foyers fF est égale à l'axe sS ; donc cette courbe est une Hyperbole; or la courbe sm est évidemment égale à la courbe Sn ; donc ces deux courbes sont deux Hyperboles conjuguées, c'est-à-dire que la courbe décrite est composée de quatre branches qui sont censées ne faire qu'une seule & même courbe.

REMARQUE I. A cause de l'angle $hfs = 45^\circ = bap$, l'on a hf parallèle à ab (fig. 26.); donc ces deux lignes ne se rencontreront jamais; ainsi le point h & le point S correspondants disparaissent; donc le point S n'existe point; c'est-à-dire que l'axe de la parabole n'est point fini; donc cet axe est infini.

REMARQUE II. Si sa étoit infiniment plus grande que $sb = sf$, les fm feroient censées égales par rapport à sa , ainsi tous les rayons vecteurs seroient égaux, & la courbe feroit un cercle. En effet c'est le rapport de sb à sa , ou (à cause des triangles semblables asb , apd) de pd à pa ou mg qui détermine la nature de la courbe, de manière que les fm sont dans le rapport des mg ; or les mg sont censées égales dans le cas de $sa = \infty$; donc alors les pd ou fm sont égales, ce qui arrive dans le cercle où les rayons sont égaux.

COROLLAIRE I. Donc une courbe dans laquelle les distances de chacun de ses points m au foyer f & à la directrice ag sont en raison constante, est une Section Conique; & cette Section conique est Parabole, Ellipse, Hyperbole ou Cercle selon que mg est par rapport à mf , égale, plus grande, plus petite ou infinie.

COROLLAIRE II. Etant donnée la directrice, un point m avec le foyer f (fig. 28.), il sera aisé de décrire la courbe; car tirant les perpendiculaires mg , mg & les rayons vecteurs fm , fm , & divisant af en deux parties telles qu'on ait $mg : fm :: sa : sf = sb$, c'est-à-dire divisant fa en parties proportionnelles aux lignes mg , fm , & prenant sf pour le quatrième terme de la proportion, on aura le sommet s de la courbe. Si l'on mène sb perpendiculaire sur as , & égale sf & qu'on tire l'indéfinie ab , on pourra ensuite décrire la courbe comme nous venons de le dire dans le Problème précédent; de manière que toute la difficulté consiste à trouver le point s . Soit le rapport de fm à sa correspondante mg égal à celui de $a : b$, la ligne connue $af = c$, la partie $sf = x$; donc $sa = c - x$. Mais parce que $fm : mg :: a : b :: fs = sb : sa$, l'on a la proportion $a : b :: x : c - x$, ou (*componendo*) $a + b : a :: x + c - x = c : x$. Prenant donc une quatrième proportionnelle aux lignes connues $a + b$, a , c l'on aura $x = fs$, & par conséquent as & le point s cherché.

61. PROBLÈME. Etant donné le foyer f & trois points m , m' , m'' d'une Section Conique, décrire la courbe (fig. 29.). Ayant tiré les cordes mm' , $m'm''$; cherchons deux points de la directrice agx .

Pour cela soit $mg = x$, $mm' = d$, faisons $fm' : fm' :: a : b :: mg : m'g :: x : d + x$; donc (dividendo) $b - a : a :: d + x - x = d : x$. Prenant donc mg quatrième proportionnelle aux lignes $b - a$, a , d on aura un des points de la directrice. Maintenant supposant $m'x = y$ & $m'm'' = g$, en faisant $fm' : fm'' :: b : c :: y : m''x = y + g$, l'on aura (subtrahendo) $c - b : b :: y + g - y = g : y$. Prenant donc sur $m''m'$ prolongée $m'x$ quatrième proportionnelle à $c - b$, b & g , l'on aura un autre point x de la directrice. Tirant par les points g & x l'indéfinie ax , l'on aura la directrice. Du foyer f on abaissera la perpendiculaire fa sur la directrice. Cela posé on connoîtra le foyer, la directrice & un point m de la courbe, puisqu'on en a trois par la supposition; donc par le Corollaire II du Problème précédent il sera aisé de décrire la courbe, qui sera une Section Conique. En effet ayant mené les lignes mp , $m'p'$; $m''p''$ perpendiculaires sur ag , à cause des triangles rectangles semblables gmp , $gm'p'$, l'on a $gm : gm'$, ou $fm : fm' :: pm : pm'$. On prouvera de même par les triangles $xm'p'$, $xm''p''$ que $fm' : fm'' :: p'm' : p'm''$, c'est-à-dire que les distances de chacun des points de la courbe au foyer & à la directrice est toujours dans un rapport constant; donc (Corollaire I du Problème précédent) la courbe est une section Conique *.

62. Nous allons faire voir maintenant que les courbes que nous avons appelées Parabole, Ellipse & Hyperbole naissent de la section d'un cône Bac par un plan iem . (fig. 30, 31 & 32.). Pour le dé-

* Ce Problème est utile dans l'Astronomie pour déterminer les orbites des Comètes.

montrer supposons un autre plan $Kilm$ parallèle au cercle Bc de la base du cône, rencontrant la première section en ihm . Concevons un troisième plan Bac qui coupe les deux premiers en Kl , & hE . Maintenant prolongeant Eh jusqu'à la rencontre d de aB prolongée s'il le faut, & ayant mené Ef & dg parallèles à Kl , & dans le plan du triangle Bac , faisons $Ef = c$, $dg = b$, $Ed = 2a$, $Eh = x$ & $hi = y$, à cause des triangles semblables Ehl , Edg , l'on a $Ed(2a) : dg(b) :: Eh(x) : hl = \frac{bx}{2a}$. De même à cause des triangles semblables Def , dhK on a $dE(2a) : fE(c) :: dh(2a - x)$ (fig. 30.), ou $(2a - x)$ (fig. 31.) : $hk = \frac{2ac + cx}{2a}$. Enfin la section $Kilm$ parallèle à la base du cône, étant évidemment un cercle, on aura (propriété du cercle) $hk \times hl = \overline{hi}^2$ * = y^2 (22.); donc $\frac{bx}{2a} \times \frac{2ac + cx}{2a} = \frac{bcx}{2a} + \frac{bcx^2}{4a^2} = y^2$; mais si Ed est parallèle à fK (fig. 32.) on aura $hK = fE = c$, & alors $hk \times hl = \overline{ih}^2$ devient $\frac{bcx}{2a} = px = y^2$, en faisant $\frac{bc}{2a} = p$, équation à la parabole (3.). Dans cette même supposition de $\frac{bc}{2a} = p$, l'équation $\frac{bcx}{2a} + \frac{bcx^2}{4a^2} = y^2$, devient $y^2 = px + \frac{px^2}{2a}$.

* ih commune section des plans Kml , amE perpendiculaires au plan Bac , est perpendiculaire au plan Bac , aussi bien qu'à Kl .

Cette équation est à l'Ellipse si l'on prend le signe $-$, & à l'Hyperbole en prenant le signe $+$; donc, &c. *

REMARQUE I. En supposant $p = \frac{2b^2}{a}$ ** & substituant cette valeur dans l'équation $y^2 = px \mp \frac{p x^2}{2a}$, il viendra $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (2ax \mp xx)$, équation à l'Ellipse en prenant le signe $-$, & à l'Hyperbole en prenant le signe $+$. On voit donc pourquoi les courbes, dont nous venons de parler, sont appelées Sections Coniques; mais parce que si le plan coupant passe par le sommet a du cône, la section est évidemment un triangle & un cercle lorsque le plan coupant est parallèle à la base du cône: il s'ensuit qu'il n'y a en tout que cinq Sections Coniques, desquelles nous avons déjà parlé sous le nom de Triangle, Cercle, Ellipse, Hyperbole & Parabole.

REMARQUE II. La ligne Ed devient évidemment d'autant plus grande, qu'elle approche plus d'être parallèle au côté $B'a$ du cône, & elle est censée infiniment grande lorsqu'elle est enfin devenue parallèle à $B'a$, & le point d est alors censé à une distance infinie de l'origine E de la courbe (fig. 32.). On peut donc considérer la Parabole

* Sous le nom d'Ellipse nous comprenons le cercle, qui n'est qu'une Ellipse, dont les foyers se réunissent au centre.

Et si dans l'équation $y^2 = px - \frac{p x^2}{2a}$, on suppose $p = 2a$, l'on aura $y^2 = 2ax - x^2$ équation au cercle, nous supposons les ordonnées perpendiculaires aux abscisses.

** b peut ici avoir une valeur différente de celle qu'il a dans $\frac{bc}{2a} = p$.

comme une Ellipse, dont l'axe est infiniment grand. En effet si dans l'équation $y^2 = px \mp \frac{x^2}{2a}$, qui est l'équation généralissime par rapport au parametre, on fait $2a = \infty$, la quantité $\frac{px^2}{2a}$ devient infiniment petite, & l'on a dans ce cas l'équation $y^2 = px$. Si l'on fait $p = 2a$, ce qui arrive dans le Cercle, dans l'Ellipse par rapport aux Diametres conjugués égaux, & dans l'Hyperbole équilatère, l'on aura $y^2 = 2ax \mp x^2$, équation au Cercle, ou aux Diametres conjugués égaux de l'Ellipse, en prenant le signe —, & à l'Hyperbole équilatère en prenant le signe +. Si l'on compte les abscisses du centre, cette équation devient $y^2 = \pm a^2 \mp x^2$. Si l'on fait $2a : 2b :: 2b : p$, l'on aura $2a : p :: 4a^2 : 4b^2 :: a^2 : b^2$ & $\frac{p}{2a} = \frac{b^2}{a^2}$; & enfin $p = \frac{2b^2}{a}$. Substituant cette valeur dans l'équation généralissime au parametre, on trouve $y^2 = \frac{2b^2}{a} x \mp \frac{b^2}{aa} x^2$, ou $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (2ax \mp x^2)$, & en supposant $b = a$, l'on a $y^2 = 2ax \mp x^2$, équation au Cercle & à l'Hyperbole équilatère; & en supposant les ordonnées obliques, cette équation appartient aux Diametres conjugués égaux de l'Ellipse en prenant le signe —. On voit par-là que l'équation $y^2 = px \mp \frac{px^2}{2a}$ peut représenter les équations de toutes les Sections Coniques, en y comprenant même le cercle. Il est évident encore que le carré d'une ordonnée est, par rapport au

produit de l'abscisse & du parametre , égal dans la Parabole , moindre dans l'Ellipse & plus grand dans l'Hyperbole. C'est de-là que ces courbes ont tiré leurs noms *.

REMARQUE III. Nous avons vu que lorsque la section Ed coupe les deux côtés du cône Bac (fig. 30.) dans le cône même, la section $Eidm$ est une Ellipse ; mais si l'angle Eda est $= Bca = Kla$ (dans ce cas la section est appelée *sub-contraire*), les triangles Ehl , dKh ayant les angles en l & d égaux , & les angles en h aussi égaux (parce qu'ils sont opposés au sommet) seront semblables ; donc $EH : lh :: Kh : dh$; donc $EH \times dh = hl \times Kh = hi^2$ (par la propriété du cercle) ; donc $EH \times dh = hi^2$. C'est-à-dire que le carré de l'ordonnée est égal au produit des abscisses dh , hE . Ce qui caractérise le cercle , lorsque les ordonnées sont perpendiculaires aux abscisses , comme cela arrive ici.

63. THÉORÈME. Si l'on coupe un cylindre $amnb$ par un plan kl oblique au côté ma , la section sera une Ellipse (fig. 33.) **. Supposons le cylindre coupé par un plan krh qui ne soit ni parallèle à la base ab , ni au côté ma (car dans ce dernier cas il est visible que les sections ne peuvent être que des lignes droites). Que la commune section de ce plan avec le plan de la base ab soit désignée par la ligne lP qui coupe à angles droits le Diamètre ab prolongé s'il le faut. Supposons de plus le plan qrp parallèle aux bases du cylindre , & encore que man soit perpendiculaire aux plans krh , qrp . La ligne rz commune intersection des deux plans krh , qrp sera perpendiculaire au plan $manb$ (Géo. 82.), & par consé-

* Parabole signifie égalité , Ellipse défaut , Hyperbole excès.

** Sous le nom d'Ellipse nous comprenons le cercle , qui n'est qu'une Ellipse , dont les axes sont égaux.

quent à la ligne qp menée dans ce plan par le point ζ . Ayant divisé hk en deux également en g , soit $gh = a$, $gz = x$, $zr = y$, l'on aura $hz = a + x$, $kz = a - x$. Faisons de plus $qp = 2b$. Les triangles kzq , pzh semblables (à cause qu'ils ont les angles en z opposés au sommet, & les angles en k & h alternes internes) donnent $kz : qz :: hz : zp$ (*componendo*), $kz + hz : qz + zp :: kz : qz$, ou $2a : 2b :: a - x : qz$. De même on a $hz : zp :: kz : qz$, ou (*componendo*) $2a : 2b :: a + x : zp$. Multipliant ces deux proportions l'on a $4a^2 : 4b^2$, ou $a^2 : b^2 :: a^2 - x^2 : qz \times pz = (rz)^2 = y^2$ (par la propriété du demi-cercle qrp); donc $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (a^2 - x^2)$, équation à une Ellipse, dont le demi-grand axe $= a$, & le demi-petit axe $= b$. Si kh devient $= qp$, c'est à-dire si la section devient parallèle à la base ab , alors $b = a$ & l'équation devient $y^2 = a^2 - x^2$ équation au cercle.

64. DÉFINITION. Si une Section Conique gda (fig. 34.) tourne sur son axe, elle engendrera un conoïde $agnm$, qui prendra le nom de *conoïde parabolique*, *elliptique* ou *hyperbolique*, selon que la section sera une Parabole, une Ellipse ou une Hyperbole.

65. THÉORÈME. Si l'on coupe un conoïde ngm supposé parabolique par un plan rq parallèle à son axe, la section sera une Parabole. Soit fait $gh = c$, le rayon ah du cercle décrit par le point $a^* = r$, & celui du cercle décrit par le point $d = R$. Soit $lh = h$, la variable $rp = z^{**}$, $qh = pl = rB = x$, les ordonnées au cercle, dont dl est le rayon, égales à y . Par la nature de la parabole l'on a (4.) $gh(c) : ab^2(r^2) :: gl(c-h) : al^2 :: gB : rB^2$; & parce que la différence des antécédents est à celle des conséquents, comme un antécédent est à son conséquent, on aura $c : r^2 :: gl - gB = rp = z : (al^2 - rB^2) = R^2 - x^2 = y^2$ (par la pro-

* Il faut concevoir le plan de la figure $grda$ perpendiculaire au plan de la planche.

** On peut prendre rp , plus ou moins grande; donc z n'est pas constante.

priété du cercle *), d'où l'on tire $r^2 z = c \times y^2$, ou $\frac{r^2}{c} \times z = y^2$, ou $y^2 = p z$, en faisant $c : r :: r : p$; or cette équation est à une parabole dont le paramètre $= p$, l'abscisse z & l'ordonnée y ; donc la section $r q$ faite parallèlement à l'axe est une parabole.

66. THÉORÈME. Si la courbe génératrice $g d a$, est un quart d'Ellipse, je dis que la section $r q$ faite parallèlement à l'axe sera portion d'une Ellipse, dont les axes seront en même raison que ceux de la courbe génératrice. Par la nature de l'Ellipse l'on a $(g h)^2$ ou c^2 (c'est le carré du demi-grand axe) $:: a h^2$ (a^2) $:: (g h)^2 - (h l)^2 = b^2 + c \times c - h^2$ (c'est le produit des abscisses, ce qu'on verroit aisément en prolongeant $g h$ jusqu'à l'autre sommet de l'Ellipse; car l'autre moitié du grand axe est $= c$) $:: (d l)^2 (R^2) :: (g h)^2 - (B h)^2 = (c^2 - z^2) :: (B r)^2$, ou x^2 ; & en divisant, $c^2 : r^2 :: z^2 - h^2 : R^2 - x^2 = y^2 z$, donc $y^2 = \frac{r^2}{c^2} \times (z^2 - h^2)$, équation à une El-

lipse dont le demi-axe $r q$ seroit $= z$, l'abscisse $= h$, & dont le demi-grand axe est au demi-petit axe comme $c^2 : r^2$. Faisant donc $c^2 : r^2 :: z^2 = (r q)^2 : b^2$, on aura $b^2 = \frac{r^2 z^2}{c^2}$, & $b = \frac{r z}{c}$, c'est-à-dire qu'on trouvera le demi-petit axe de cette Ellipse, en prenant une quatrième proportionnelle aux lignes $g h$, $h a$, $r q$. Cette proposition est utile pour calculer le volume d'eau que doit déplacer un vaisseau lorsqu'on augmente la charge.

67. THÉORÈME. La section $r q$ sera une Hyperbole, si le Conoïde est hyperbolique. Car soit $g f$ le demi-premier axe de l'Hyperbole génératrice $= a$, le second demi-axe $f b = b$. Soit $r p = z$, qui devient $r q$ lorsque $d l$ se confond avec $a h$, $f h = c$, $f B = d$. Par la propriété de l'Hyperbole, $a^2 : b^2 :: c^2 - a^2 : r^2 :: c^2 - 2 c h + h^2 - a^2 : R^2 :: c^2 - 2 c h + h^2 - 2 c z + 2 h z +$

* $r^2 - x^2 = r + x$, $r - x = \frac{r^2 - x^2}{r + x} = \frac{r^2 - x^2}{d l + l p} = \frac{(d l + l p)}{d l + l p} \times y^2$, en concevant une ordonnée y au Diamètre $d n$ qui rencontre ce Diamètre en p .

$z^2 - a^2 : x^2$, & en divisant, $a^2 : b^2 :: 2cz - 2hz - z^2 : R^2 - x^2 (y^2)$; or $2c = 2h = 2fh - 2lh = 2fl$; donc $2cz - 2hz = 2fl \times z$, & $2cz - 2hz - z^2 = (2fl - z) \times z = (2fl - Bl) \times z = (2fB + Bl) \times z = (2fB + z) \times z$ (à cause de $Bl = fp = z$) $= (2d + z) \times z = 2dz + z^2$; donc

$a^2 : b^2 :: 2dz + z^2 : y^2$, & $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (2dz + z^2)$, équation à une Hyperbole, dont l'abscisse comptée depuis le

sommet est $= z$, le premier axe $= 2d$, & le rapport du carré du demi-premier axe à celui du demi-second axe (que j'appellerai $= g$) égal au rapport du carré du demi-premier axe, au carré du demi-second axe de l'Hyperbole génératrice. Donc on aura $a^2 : b^2 :: d^2 : g^2 = \frac{b^2 d^2}{a^2}$; donc $g =$

$\frac{b d}{a}$; donc on aura $a : b :: d : \frac{b d}{a}$. C'est-à-dire qu'on

trouvera le second demi-axe g en prenant une quatrième proportionnelle aux lignes a, b, d .

REMARQUE. Nous verrons dans la suite que toutes les Paraboles sont des courbes semblables, que les Ellipses dont les axes sont proportionnels sont aussi des courbes semblables, & qu'il en est de même des Hyperboles; donc en coupant un Conoïde parabolique, elliptique, ou hyperbolique, engendré par la révolution de sa courbe autour de son premier axe, il en résultera une courbe semblable à la courbe génératrice.

68. PROBLÈME. *Cuber un Conoïde parabolique* mag (fig. 35.), *formé par la révolution de la parabole autour de son axe*. Si l'on fait attention que dans la révolution de la courbe autour de ab , chaque ordonnée pn décrit un cercle, on verra aisément que les éléments du paraboloïde sont des cercles, qui depuis le sommet a vont en croissant comme les carrés des ordonnées; c'est-à-dire comme les abscisses ap, ap , &c. En supposant ces abscisses en progression arithmétique $\div 0. 1. 2. 3.$ &c. (l'on suppose la première infiniment petite, ou $= 0$, ou $= \frac{1}{\infty}$ par rapport à la der-

niere), les quarrés des ordonnées seront comme les termes de cette progression, & le solide cherché sera $= \frac{b.A}{2}$. Car par la propriété de la progression, en supposant $= A$ le dernier cercle, ou le cercle de la base, & $= b$ la hauteur du conoïde (b représente le nombre des termes de la progression 0. 1. 2. 3. 4. 5. ... A), la somme des termes, ou le solide cherché sera $(0 + A) . b = \frac{A b}{2}$; puisque la somme d'une progression arithmétique est égale au produit des extrêmes par la moitié du nombre des termes. Mais $b.A$ représente un cylindre de même base A & de même hauteur b que le conoïde; donc un conoïde parabolique formé par la révolution de la parabole autour de son axe, est la moitié d'un cylindre de même base & de même hauteur.

69. PROBLÈME. *Trouver la solidité de l'Ellipsoïde, ou cuber l'Ellipsoïde* (fig. 6.). Si l'on conçoit qu'un cercle décrit sur le grand axe d'une Ellipse tourne autour de cet axe $a A$, aussi-bien que l'Ellipse, les ordonnées du cercle décriront des cercles qui seront aux cercles décrits par les ordonnées correspondantes de l'Ellipse, comme les quarrés des ordonnées du cercle aux quarrés des ordonnées de l'Ellipse (car les cercles sont comme les quarrés de leurs rayons), c'est-à-dire comme le quarré du demi-grand axe au quarré du demi-petit axe (voyez le n° 34.). D'ailleurs le nombre des cercles (qu'il faut concevoir d'une épaisseur infiniment petite) qui forment la sphere engendrée par la révolution du cercle, est égal au nombre des cercles ou éléments de l'Ellipsoïde; donc la sphere décrite

par le cercle dont le diamètre est égal au grand axe de l'Ellipse, est à l'Ellipsoïde comme le carré du demi-grand axe au carré du demi-petit axe. Mais si l'on conçoit deux cylindres de même hauteur, dont l'un ait pour rayon de sa base le demi-grand axe, l'autre le demi-petit axe, ces deux cylindres seront entre eux comme leurs bases, ou comme les carrés des rayons de leurs bases, c'est-à-dire comme le carré du demi-grand axe de l'Ellipse au carré du demi-petit axe; donc la sphere est à l'Ellipsoïde, comme le cylindre circonscrit à la sphere, au cylindre circonscrit à l'Ellipsoïde, ou (*alternando*) la sphere est au cylindre qui lui est circonscrit, comme l'Ellipsoïde est au cylindre qui lui est aussi circonscrit; or la sphere est les $\frac{2}{3}$ du premier cylindre; donc l'Ellipsoïde est les $\frac{2}{3}$ du second; donc l'Ellipsoïde vaut les $\frac{2}{3}$ d'un cylindre, dont la hauteur est égale au grand axe, & dont le rayon de la base est égal au petit demi-axe de l'Ellipse génératrice. On démontrera par un raisonnement semblable que l'Ellipsoïde, engendré par la révolution de l'Ellipse autour du petit axe, est les $\frac{2}{3}$ d'un cylindre dont la hauteur est égale au petit axe, & dont le diamètre de la base est égal au grand axe.

De quelques propriétés de l'Hyperbole, & d'une belle propriété de la Parabole, de l'Ellipse & de l'Hyperbole, dont nous n'avons point encore parlé.

70. DÉFINITION. Si l'on prolonge les ordonnées d , à l'asymptote d'une Hyperbole parallèles à l'autre asymptote (fig. 36.) jusqu'à ce que $h = d$, & qu'on fasse la même chose sur les autres trois branches des deux Hyperboles opposées, si par tous ces points on fait passer des courbes hbp , oBh' , on aura

deux Hyperboles qui seront conjuguées aux deux premières ad , AD & réciproquement, & dont les axes seront les mêmes, avec cette différence que le second axe des premières sera le premier, & le premier des premières Hyperboles sera le second axe des Hyperboles conjuguées. Pour prouver que ces courbes sont des Hyperboles, on remarquera que $d\mathfrak{g} = h\mathfrak{g}$, & parce que $C\mathfrak{g} \times d\mathfrak{g} = \overline{CK}^2 = c^2$ (44.), on aura de même $Cy \times y h = x.y = c^2$.

COROLLAIRE. Donc $y = \frac{c^2}{x}$, pour l'une & l'autre branche ad & bh , c'est-à-dire que les ordonnées aux branches correspondantes des Hyperboles conjuguées sont en raison inverse de leurs abscisses. Faisant $x = \infty$, on aura $y = \frac{c^2}{\infty} = 0$, c'est-à-dire que l'asymptote $C\mathfrak{g}$ est censée tangente des branches ad , bh à une distance infinie, & $C\mathfrak{g}$ est une asymptote commune aux deux branches. En un mot les asymptotes des premières Hyperboles sont aussi asymptotes des conjuguées.

Puisque le parallélogramme $ba x C$ donne ba parallèle à l'asymptote Cx , & par conséquent à l'ordonnée $d\mathfrak{g} = \mathfrak{g}h$, & que $aK = bK$ (44.), le point b appartient à l'Hyperbole hb & en est le sommet. De plus à cause qu'on trouve les asymptotes d'une Hyperbole en tirant des lignes par le centre C & les extrémités x, \mathfrak{g} d'une perpendiculaire au premier axe, égale au second axe & divisée en deux également par le sommet de l'Hyperbole, il est évident que $b\mathfrak{g}$ est le second demi-axe, & Cb le premier demi-axe de l'Hyperbole $hb p$.

71. THÉORÈME. Si par l'extrémité h de l'ordonnée $\mathfrak{g}h$ à l'asymptote de l'Hyperbole conjuguée $hb p$,

on tire la ligne hCh' par le centre C jusqu'à la rencontre de l'autre Hyperbole conjuguée ; je dis que hh' sera le Diametre conjugué du Diametre dD , qui passe par le point d correspondant au point h . Car pour avoir le Diametre conjugué à dD , il faut tirer par le centre C , parallèlement à la tangente au point d , la ligne hh' , terminée en h & h' par les lignes dh , $d'h'$ parallèles aux asymptotes ; or cette construction donne $Ch = dr$, & $Ch = ds = dr$, à cause des Parallélogrammes $Chdr$, $Ch'ds$; mais en faisant $gh = gd$, on a $hd = Cr$: (car à cause des triangles semblables srC , sdg , $Cr = 2dg = dh$) ; donc $Crhd$ est un parallélogramme, & hC est $= dr$, propriété du Diametre conjugué.

COROLLAIRE. Il suit de-là que les Hyperboles conjuguées passent par les extrémités de tous les Diametres conjugués des premières Hyperboles & réciproquement.

REMARQUE. L'équation des premières Hyperboles rapportées à l'axe aA est $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (x^2 - a^2)$; mais l'axe aA étant le second axe des Hyperboles conjuguées, leur équation, par rapport à cet axe, sera $Y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (a^2 - x'x')$ en faisant l'abscisse prise sur cet axe $= x'$ & son ordonnée Y , équation qui diffère totalement de la première ; donc les Hyperboles conjuguées ne font pas une seule & même courbe avec les premières.

72. COROLLAIRE. Il suit de cette Remarque que si l'on prend deux ordonnées au premier axe dans l'Hyperbole ad , nous les appellerons y , Y , & deux ordonnées au même axe aA dans l'Hyperbole bh , nous les appellerons p , P ; on aura

$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (x^2 - a^2)$, $Y^2 = \frac{b^2}{a^2} (x' x' - a^2)$, $p^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 + u^2)$, $P^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 + u' u')$. En faisant pour abréger, $\frac{b^2}{a^2} = d$, $x^2 - a^2 = s$, $x' x' - a^2 = S$, $a^2 + u^2 = q$, $a^2 + u' u' = Q$ (u & u' désignent

les abscisses de l'Hyperbole $b h$), l'on aura $y^2 : d s :: Y^2 : d S :: p^2 : d q :: P^2 : d Q$ (car les termes de chacune de ces raisons sont égaux entre eux). Divisant les conséquents de ces proportions par d , il vient $y^2 : s :: Y^2 : S :: p^2 : q :: P^2 : Q$; donc $y^2 : s :: p^2 : q$, ou (en remettant les valeurs de s & de q , & *alternando*) $y^2 : p^2 :: x^2 - a^2 : a^2 + u^2$. C'est-à-dire que les quarrés des deux ordonnées, dont l'une appartient à une des premières Hyperboles, & l'autre à l'Hyperbole conjuguée correspondante, sont entr'eux comme le produit des abscisses du premier Diametre à la somme du quarré de ce premier Diametre, & du quarré de l'abscisse comprise entre le centre & la rencontre de l'ordonnée abaissée d'un point quelconque de l'Hyperbole conjuguée sur ce même Diametre.

73. THÉORÈME. Si des extrémités d & h' de deux Diametres conjugués on mene les lignes $h' N$, $d P$ ordonnées au premier axe $a A$ des premières Hyperboles, le quarré de $CN (u)$ compris entre le centre C & la rencontre de l'ordonnée $h' N$ est égal au produit $x^2 - a^2$ des abscisses de l'autre ordonnée $d P$. Car par le Corollaire précédent $d P^2 : h' N^2 :: :$

* Il faut se rappeler que le point h' appartient à une des Hyperboles conjuguées, étant l'extrémité d'un Diametre conjugué, par rapport à l'une des premières Hyperboles.

$x^2 - a^2 : a^2 + u^2$; or à cause des triangles semblables TP, CN^* , l'on a $\overline{TP^2} : \overline{CN^2} :: \overline{TP^2} : \overline{CN^2}$; donc $x^2 - a^2 : a^2 + u^2 :: \overline{TP^2} : \overline{CN^2} :: \frac{x^2 - a^2}{x^2} : u^2$; ainsi $u^2 \times (x^2 - a^2) = (a^2 + u^2) \cdot \frac{(x^2 - a^2)}{x^2}$. Divisant par $x^2 - a^2$ & mul-

tipliant par x^2 , l'on a $u^2 x^2 = (a^2 + u^2) \cdot (x^2 - a^2) = a^2 x^2 - a^4 + u^2 x^2 - a^2 u^2$. Effaçant $u^2 x^2$ de part & d'autre & transposant l'on a $a^2 u^2 = x^2 a^2 - a^4$, & en divisant par a^2 on a enfin $u^2 = x^2 - a^2$.

COROLLAIRE. Donc $x^2 = a^2 + u^2$.

74. THÉORÈME. Dans l'Ellipse (fig. 16.) la somme des carrés de deux demi-Diamètres conjugués quelconques Cm, Cn est constante & égale à la somme des carrés des demi-axes. Car par la propriété de l'Ellipse, $a^2 : b^2 :: Ax : a\zeta : \zeta n^2$; or (par le n° 53.) $Ax \times \zeta a = \overline{CP^2} = x^2$; donc $a^2 : b^2 :: x^2 : \zeta n^2 = \frac{b^2 x^2}{a^2}$. Mais les triangles $CPm, Cn\zeta$ rectangles en P & ζ donnent $\overline{Cm^2} = \overline{CP^2} + \overline{Pm^2} = x^2 + b^2 - \frac{x^2 b^2}{a^2}$ (parce que $\overline{Pm^2} = b^2 - \frac{x^2 b^2}{a^2}$ **), & $\overline{Cn^2} = \overline{C\zeta^2} + \overline{\zeta n^2} = a^2 - x^2 + \frac{b^2 x^2}{a^2}$ (parce que $\overline{C\zeta^2}$ (53.) $= a^2 - x^2$); donc $\overline{Cm^2} + \overline{Cn^2} = b^2 + a^2$.

* Parce que les angles P & N sont droits, & les angles en T & C alternes externes.

** Car (29.) l'équation $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (aa - x)^2$ donne $y^2 = b^2 - \frac{x^2 b^2}{a^2}$.

75. THÉORÈME. Dans l'Hyperbole (fig. 37.) la différence des carrés des deux demi-Diamètres conjugués quelconques Cd , Ch' est constante & égale à la différence des carrés des demi-axes. En effet l'équation des Hyperboles conjuguées, rapportées à l'axe aA , est $Y^2 = \frac{b^2}{a^2} x$

$$(a^2 + u^2) = \frac{b^2}{a^2} x^2 \text{ (parce que (73.) } a^2 + u^2 = x^2 \text{);}$$

$$\text{donc } (h'N)^2 = Y^2 = \frac{b^2 x^2}{a^2}. \text{ Mais } (Cd)^2 = (CP)^2 +$$

$$(Pd)^2 = x^2 + \frac{b^2 x^2}{a^2} - b^2, \text{ \& } (h'C)^2 = (CN)^2 +$$

$$(h'N)^2 = x^2 - a^2 + \frac{b^2 x^2}{a^2} \text{ (à cause de } (CN)^2 \text{ (73.)} =$$

$$x^2 - a^2) \text{ donc } (Cd)^2 - (h'C)^2 = a^2 - b^2, \text{ \& } (Ch')^2 -$$

(Cd)² = b² - a².
COROLLAIRE. Dans l'Hyperbole équilatère, a étant égal à b , l'on aura $(Cd)^2 - (Ch')^2 = a^2 - b^2 = 0$, & $Cd = Ch'$; donc dans l'Hyperbole équilatère tous les Diamètres conjugués sont égaux deux à deux.

REMARQUE. En supposant $Cd = a$, $Ch' = b$, l'équation à l'Hyperbole équilatère, par rapport aux axes conjugués, sera évidemment $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot (x^2 - a^2) = x^2 - a^2$; donc pour savoir si cette équation appartient aux axes ou aux Diamètres conjugués, il faut savoir si l'angle des coordonnées (l'abscisse avec l'ordonnée correspondante sont dites coordonnées) est droit ou oblique. Dans le premier cas l'équation est aux axes & aux diamètres conjugués dans le second cas.

76. THÉORÈME. Si les abscisses cm , cn , cq , &c. (fig. 37.) comptées sur une asymptote depuis le centre c , sont en progression géométrique croissante, les ordonnées seront en progression géométrique dé-

* L'équation à l'Hyperbole $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot (x^2 - a^2)$ donne

$$(pd)^2 = y^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2 - b^2.$$

croissante. En effet puisque $x.y = c^2$ (44.), pour une autre x' & son Y on aura $x'Y = c^2$, &c. Donc lorsqu'une abscisse devient double, son ordonnée devient sous-double; lorsqu'une abscisse devient triple, son ordonnée devient sous-triple, &c. autrement le produit $x.y$ d'une abscisse quelconque par son ordonnée ne seroit pas égal à une quantité constante c^2 ; donc si les abscisses croissent en progression géométrique, les ordonnées décroissent en progression géométrique; donc, &c.

77. THÉORÈME. *Les abscisses ck, cm, cn, cq , &c. étant supposées en progression géométrique, leurs différences km, mn, nq , &c. seront aussi en progression géométrique.* C'est une suite de ce que nous avons démontré dans la première Partie, que les différences des termes consécutifs d'une progression géométrique, sont aussi en progression géométrique; donc, &c.

78. THÉORÈME. *Les aires hyperboliques $kamm, mnmn$, &c. établies sur ces différences, sont égales entr'elles.* Concevons que les différences km, mn , &c. sont partagées en un même nombre de parties égales pour chaque différence & infiniment petites par rapport aux lignes km, mn . Concevons de plus que les aires $kamm, mnmn$, &c. sont composées de petites surfaces $oomm, ppnn$ qui ont pour bases les parties infiniment petites, dont nous venons de parler. Ces petites surfaces seront les éléments des aires dont il s'agit; or ces éléments sont égaux en nombre par la supposition, mais de plus ils sont égaux entr'eux. En effet, puisque les lignes km, mn sont partagées en un même nombre de parties égales, chacune des parties om de la première est à chacune des parties pn de la

seconde comme $km : mn$; donc $om : pn :: km : mn$,
 & parce que l'on a par supposition $ck : cm :: cm : cn$, on aura $ck - cm (km) : cm :: cn - cm (mn) : cn$, ou (*alternando*) $km : mn :: cm : cn$;
 mais l'abscisse $cm \times mm \triangleq$ l'abscisse $cn \times nn$; donc
 $cm : cn :: nn : mm$; donc $om : pn :: nn : mm$
 & $om \times mm = pn \times nn$, ou $oomm = ppnn$;
 donc les éléments de l'aire $kamm$ sont égaux en
 nombre & en grandeur à ceux de l'aire $mnmn$;
 donc ces aires sont égales ; donc , &c.

COROLLAIRE. Si l'on prend une infinité d'abscisses en progression géométrique , à un nombre infini de différences répondra un nombre infini d'aires égales & finies ; donc l'espace asymptotique compris entre l'Asymptote & l'Hyperbole est infini.

REMARQUE I. Nous avons supposé dans cette démonstration que les éléments ou trapezes $omom$, $pnpn$ étoient des rectangles , ce qui n'est pas absolument vrai ; mais lorsque les lignes om , pn sont infiniment petites , les trapezes $omom$, &c. peuvent être regardées comme des rectangles , du moins dans le cas de l'Hyperbole équilatere : car alors l'angle des asymptotes est droit , puisque dans ce cas $ax = BC = Ca$ (fig. 11.) , ce qui rend isocelle le triangle rectangle Cax ; donc l'angle xCa est de 45° aussi-bien que l'angle yCa ; donc l'angle xCy est de 90° , ce qui n'arrive que dans ce cas. En supposant que l'Hyperbole de la fig. 37 est scalene (c'est-à-dire qu'elle a les axes inégaux) , les petites trapezes $omom$, &c. peuvent être regardées comme des parallélogrammes qui ont les côtés adjacents aux angles égaux m , n réciproquement proportionnels.

REMARQUE II. Dans le cas de l'Hyperbole scalene

les petits trapezes $oomm$, $ppnn$ feroient égaux au produit de la base par la perpendiculaire abaissée de l'extrémité de chaque ordonnée mm , nn sur la base, & ces perpendiculaires formeroient, avec l'ordonnée, la partie de l'asymptote comprise entre l'ordonnée & la perpendiculaire des triangles semblables, dont les hauteurs feroient proportionnelles aux ordonnées correspondantes. Donc les parallélogrammes dont nous venons de parler, qui ont pour hauteurs ces perpendiculaires, ont leurs bases réciproques à leurs hauteurs, ce qui les rend égaux. De plus ces perpendiculaires sont comme le sinus des angles correspondants $oom = xcm$; donc les aires hyperboliques, dans le cas de l'Hyperbole scalene, sont aux aires hyperboliques établies sur des lignes égales dans le cas de l'Hyperbole équilatere, comme le sinus de l'angle des asymptotes est au sinus total.

75. THÉORÈME. Si par les points a , m , n , &c. de la courbe & par le centre c on tire les lignes ca , cm , cn , &c. les secteurs hyperboliques cak , $cm m$, &c. seront égaux entr'eux & aux trapezes hyperboliques $akmm$, $mnmn$, &c. correspondants. Il est évident (44.) que $ck \times ak = cm \times mm$, ce qui donne $ck : cm :: mm : ak$, c'est-à-dire que les triangles cka , $cm m$ ont des côtés réciproques adjacents à des angles égaux : or il est visible que les hauteurs de ces triangles sont entr'elles comme les côtés ak , mm , c'est-à-dire, en raison inverse, des bases, ou des moitiés des bases; donc ces triangles sont égaux. Tant de part & d'autre la partie commune chk , l'on aura $cah = hkm m$, & ajoutant de part & d'autre l'aire ahm , il en résultera le secteur $cam = akmm$, & ainsi des autres; donc, &c.

COROLLAIRE. Il suit des deux derniers Théorèmes que les secteurs, de même que les trapezes hyperboliques, qui répondent à des abscisses en progression géométrique, sont eux-mêmes en progression arithmétique; donc selon ce que nous avons dit dans la première Partie de cet Ouvrage, ils peuvent être regardés comme les logarithmes de ces abscisses. Ainsi supposant que ck représente le nombre dont le logarithme est $= 0$, l'aire $akmm$ représentera le logarithme du nombre cm , l'aire $aknn$ celui du nombre cn , &c. Ces logarithmes sont appelés *hyperboliques*, lorsque l'Hyperbole est équilatère.

80. PROBLÈME. Supposant l'Hyperbole aq équilatère & l'abscisse $co =$ l'ordonnée $oo = 1$, trouver l'aire $oonn$. Par la nature de l'Hyperbole, en faisant $on = x$, l'on a $oo \times co = cn \times nn$, ou $1 \times 1 = (1 + x) \times y$, ou $1 = y \times (1 + x)$, d'où l'on tire $y = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3$, &c. (en élevant $1 + x$ à la puissance -1 par le binome de Newton) $= 1 (x^0 - x + x^2 - x^3 + x^4 \text{ &c.})$ à cause de $x^0 = 1$. Cela posé, si l'on pouvoit sommer tous les y (que je suppose d'une largeur infiniment petite) compris entre les ordonnées oo & nn , on auroit l'aire cherchée; ou, ce qui est la même chose, si l'on pouvoit avoir la somme de toutes les séries $x^0 - x + x^2$, &c. correspondantes à chaque y ; or on peut concevoir les x comme croissantes selon la progression $\div 0. 1. 2. 3. \text{ &c.}$ jusqu'à la dernière $x = on$ qu'on supposera $= \infty$, à cause qu'elle est infiniment plus grande que la première, qu'on peut supposer infiniment petite; mais par la formule $\frac{\infty^{m+1}}{m+1}$ que nous avons donnée dans la première Partie de cet Ouvrage, la somme de x^0 est

$= x$, celle de $-x$ est $= -\frac{x^2}{2}$, celle de x^2 ou du troisieme terme est $= \frac{x^3}{3}$, &c.; donc l'aire cherchée est $= 1 \times \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \&c. \right)$. Si l'on faisoit $ok = -x$ (à cause que les x qui alloient ci-devant de o en n vont maintenant dans un sens opposé), on auroit $ck = 1 - x$, & supposant $ak = y$ on auroit $(1 - x) \times y = 1$, ou $y = \frac{1}{1-x}$, ou (en effectuant la division) $y = 1 + x + x^2 + x^3$, &c. & l'on trouveroit de même que l'espace $o o a k$ est $= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}$, &c.

COROLL. I. Puisque les espaces dont nous venons de parler représentent, le premier le logarithme du nombre cn plus grand que l'unité, le second celui du nombre $ck < 1 = co$, par hypothese; les séries que nous venons de trouver représenteront aussi les logarithmes hyperboliques de ces mêmes nombres $1 + x$ & $1 - x$; mais le logarithme du nombre $1 - x$ plus petit que l'unité, & par conséquent fractionnaire, doit être négatif; donc il faudra changer le signe des termes de la seconde série, ce qui les rendra tous négatifs, & l'on aura, en général pour représenter les logarithmes hyperboliques d'un nombre plus grand ou plus petit que l'unité, la série $\pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \frac{x^5}{5}$, &c.

REMARQUE. Cette série ne peut être utile qu'en supposant $x = 1$ ou $x < 1$, autrement elle ne seroit pas convergente. Mais en supposant $x < 1$,

les termes ultérieurs seront d'autant plus petits que x sera plus petite.

COROLLAIRE II. Pour avoir le logarithme du quotient d'un nombre divisé par un autre nombre, il suffit, selon ce que nous avons dit dans la première Partie de cet Ouvrage, de retrancher le logarithme du diviseur de celui du dividende; donc $L.\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ ($L.$ désigne un logarithme) se trouvera en ôtant la série $-x - x^2 - x^3$, &c. de la série $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$, &c. ce qui donnera

$$L.\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \dots, \text{ \&c.}$$

COROLLAIRE III. Supposant $\frac{1+x}{1-x} = \frac{p}{q}$, l'on aura, en faisant disparaître les dénominateurs, $q + qx = p - px$, & en transposant, $qx + px = p - q$, & en divisant par $p + q$, $x = \frac{p - q}{p + q}$; donc $L.\left(\frac{p}{q}\right) = 2x + \frac{2x^3}{3} \text{ \&c.}$ Si dans cette série on substitue les valeurs de x , x^3 , &c. tirées de l'équation $x = \frac{p - q}{p + q}$, on aura ce logarithme exprimé en nombres, en supposant que p & q sont des nombres connus.

Soit par exemple le nombre 2, dont on demande le logarithme hyperbolique. Faites $\frac{1+x}{1-x} = \frac{p}{q} = \frac{2}{1}$, en faisant $p = 2$ & $q = 1$ (si le nombre proposé étoit fractionnaire & $= \frac{1}{2}$, par exemple, on

feroit $\frac{1}{2} = \frac{p}{q}$), & vous aurez $x = \frac{p-q}{p+q} = \frac{1}{3}$. Substi-

tuant cette valeur de x dans la série $2x + \frac{2x^2}{3} + \&c.$

l'on aura le logarithme hyperbolique cherché; ce qu'on peut pratiquer ainsi : en réduisant en décimales & ne poussant pas l'approximation au-delà des cent millionnièmes.

$$x = \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times 0.3333333 = 0.3333333.$$

$$\frac{x^3}{3} = \frac{1}{9} \times \frac{x}{3} = \frac{1}{9} \times 0.03703703 = 0.01234567.$$

$$\frac{x^5}{5} = \frac{1}{9} \times \frac{x^3}{5} = \frac{1}{9} \times 0.00411522 = 0.00082304.$$

$$\frac{x^7}{7} = \frac{1}{9} \times \frac{x^5}{7} = \frac{1}{9} \times 0.00045724 = 0.0000632.$$

$$\frac{x^9}{9} = \frac{1}{9} \times \frac{x^7}{9} = \frac{1}{9} \times 0.00005080 = 0.00000564.$$

$$\frac{x^{11}}{11} = \frac{1}{9} \times \frac{x^9}{11} = \frac{1}{11} \times 0.00000564 = 0.00000051.$$

$$\text{SOMME} = \dots\dots\dots 0.34657351.$$

$$\text{Dont le double} \dots\dots\dots 0.69314702.$$

est le logarithme hyperbolique de 2.

81. THÉORÈME. *Dans deux Hyperboles les aires asymptotiques correspondantes aux différences des abscisses consécutives égales chacune à chacune & en progression géométrique, sont dans un rapport constant.* Car prenant quatre de ces aires dans l'une & l'autre Hyperbole, elles seront égales entr'elles (78.) (s'entend dans chaque Hyperbole), & leurs sommes qui désignent le logarithme de la plus grande abscisse (la plus petite abscisse étant supposée = 1) dans l'une &

l'autre Hyperbole , feront entr'elles comme deux aires correspondantes quelconques ; donc , &c.

COROLLAIRE. Donc si l'on suppose une Hyperbole qui soit telle que ses aires asymptotiques représentent les logarithmes des tables , tandis que les abscisses asymptotiques représenteront les nombres correspondants à ces logarithmes , on aura toujours le logarithme tabulaire d'un nombre 10 , par exemple , au logarithme hyperbolique du même nombre , comme le logarithme tabulaire du nombre 2 , au logarithme hyperbolique du même nombre ; donc 0.301030 (log. tab. de 2.) : 0.693147 (log. hyp. de 2 , en s'en tenant aux millioniemes) :: 1 (log. tab. de 10) : 2.302585 (log. hyp. de 10). Maintenant pour trouver le logarithme tabulaire d'un nombre x , dont on a le logarithme hyperbolique , en supposant m le logarithme hyperbolique de x , on fera cette proportion 2.302585 :

$$1 :: m : y = m \times \frac{1}{2.302585} \text{ (log. tab. de } x \text{) , ou}$$

(en effectuant la division de 1 par 2.302585) $y = m \times 0.434294$; donc pour avoir le logarithme tabulaire d'un nombre quelconque , il suffit de multiplier son logarithme hyperbolique par 0.434294 ; & parce que $y = m \times 0.434$ &c. l'on aura $m =$

$\frac{y \times 1}{0.434 \text{ \&c.}} = y \times 2.302585$, c'est à-dire que le logarithme hyperbolique d'un nombre est égal au logarithme tabulaire du même nombre , en le multipliant par 2.302585.

82. Avant de passer plus loin , nous allons dire un mot de ce que nous entendons par *sinus & cosinus hyperboliques*. Soit (fig. 38.) le demi-axe pa d'une Hyperbole saf supposée équilatere $= r$, nous

l'appellerons *sinus total*, pour conserver l'analogie avec le cercle. En faisant $= m$ le logarithme hyperbolique d'un nombre désigné par pg , menant l'ordonnée cg perpendiculaire à l'asymptote pg , & la perpendiculaire cb à l'axe, la ligne pb sera le *cosinus*, & bc le *sinus* de m . Le sinus de m sera désigné par $sh.m$, le cosinus par $ch.m$. parce que au point a , $bc = 0$, & $pb = pa = r$, en menant les lignes sr , ak parallèles à gc , l'on aura pour le nombre représenté par pk , $sh.m = 0$, & $ch.m = r$. Les m qui répondent aux nombres plus petits que pk , qu'on peut supposer $= 1$ (car l'unité est une quantité arbitraire), sont négatifs & ont leurs cosinus positifs, mais leurs sinus sont négatifs. Si l'on fait $pg : pk :: pk :$
 pr , on aura $pr = \frac{1}{pg}$ (à cause de $pk = 1$).

Ainsi le logarithme de pr sera $= L. 1 - m = 0 - m = -m$, parce que le logarithme hyperbolique de 1 est $= 0$, comme son logarithme tabulaire. Ayant tiré rs , si l'on joint les points s, c par la ligne sc , je dis que cette ligne est perpendiculaire à l'axe. Les triangles igc, irs semblables à cause des parallèles gc, rs donnent $ig : ir :: gc : rs :: pr : pg$ (par la propriété de l'Hyperbole) & en divisant, $ig : rg :: pr : rg$; donc $ig = pr$. D'ailleurs $pr : pk :: ur : ak$ (à cause des triangles semblables pru, pak); & comme $pr : pk :: pk : pg :: gc : ak$, on aura $ru : ak :: gc : ak$, ou (*alternando*) $ru : gc :: ak : ak$; donc $gc = ru$; donc les triangles rectangles pru, igc ont les côtés qui comprennent l'angle droit égaux; donc ils sont égaux en tout, & l'angle $gic = upr$; mais $upr = 45^\circ$; donc son complément pur est aussi de 45° ; donc dans le triangle

pbi , on a l'angle p & l'angle i chacun de 45° ; donc l'angle b est $= 90^\circ$; donc la ligne sci est perpendiculaire sur l'axe pb .

COROLLAIRE. Il suit de cette démonstration que $ch.m = ch. - m$, puisque l'un & l'autre est $= pb^*$. Mais $sh. - m = -sh.m$: puisque $sh.m = bc$, & $sh. - m = bs$; & quoique $bc = bs$, cependant l'un est positif & l'autre négatif.

83. PROBLÈME. Etant donnés les sinus & les cosinus de deux logarithmes m, n , trouver le sinus & le cosinus de leur somme $m + n$. Soit $pb = ch.m$, $bc = sh.m$, $pd = ch.n$, $df = sh.n$. Soit supposé $pm = ch. \frac{m+n}{2}$, & $mn = sh. \frac{m+n}{2}$. A cause de l'angle $apk = 45^\circ = pib$, on a $pb = bi$, & de même $pd = dl$, $pm = mq$. On aura donc $ci = ib - bc = pb - bc = ch.m - sh.m$, $fl = ch.n - sh.n$, $nq = ch. \frac{m+n}{2} - sh. \frac{m+n}{2}$. De plus à cause du triangle isocèle apk rectangle en k & de $pa = r$ on a $p\bar{k}^2 + a\bar{k}^2$, ou $2.p\bar{k}^2 = r^2$, $p\bar{k}^2 = \frac{r^2}{2}$ & $pk = \frac{r}{\sqrt{2}}$. A cause du triangle rectangle isocèle igc , on a $2.g\bar{i}^2 = c\bar{i}^2$, ou $gi = \frac{ci}{\sqrt{2}} = \frac{ch.m - sh.m}{\sqrt{2}}$. De même $hl = \frac{ch.n - sh.n}{\sqrt{2}}$ & $qo = \frac{ch.(m+n) - sh.(m+n)}{\sqrt{2}}$. Enfin le triangle pbi rectangle en b donne $p\bar{i}^2 = p\bar{b}^2 + b\bar{i}^2 = 2.p\bar{b}^2$, ou $pi = \sqrt{2} \times ch.m$.

* Car le cosinus de m est la partie de l'axe comprise entre le centre & l'ordonnée, menée du point auquel la perpendiculaire tirée sur l'asymptote au point où se termine le nombre pr , ou pg , rencontre l'Hyperbole.

On voit aussi que $pl = \sqrt{2} \times ch.n$, & $pq = \sqrt{2} \times ch.\overline{m+n}$. C'est pourquoi $pg = \sqrt{2} \times ch.m - \left(\frac{ch.m - sh.m}{\sqrt{2}} \right)$, ou en réduisant l'en-

sier en fraction, $pg = \frac{ch.m + sh.m}{\sqrt{2}}$. De même

$$ph = \frac{ch.n + sh.n}{\sqrt{2}}, \text{ \& } po = \frac{ch.(m+n) + sh.(m+n)}{\sqrt{2}};$$

or $pk : pg :: ph : po^*$; donc $\frac{r}{\sqrt{2}} : \frac{ch.m + sh.m}{\sqrt{2}} ::$

$$\frac{ch.n + sh.n}{\sqrt{2}} : \frac{ch.(m+n) + sh.(m+n)}{\sqrt{2}}; \text{ d'où}$$

l'on tire l'équation (A) $ch.(m+n) + sh.(m+n) = (ch.m + sh.m) \times (ch.n + sh.n)$. Maintenant

l'équation à l'Hyperbole équilatere donne $\frac{y^2}{b^2} = \frac{sh.m^2}{ch.m^2} = x^2 - a^2 = \frac{p^2 b^2}{p^2 a^2} = \frac{ch.m^2 - r^2}{ch.m^2}$. Donc $\frac{ch.m^2}{ch.m^2} - \frac{sh.m^2}{ch.m^2} = r^2 = (ch.m + sh.m) \times (ch.m - sh.m)$, où $ch.m + sh.m = \frac{r^2}{ch.m - sh.m}$. Par la même raison

$$ch.n + sh.n = \frac{r^2}{ch.n - sh.n} \text{ \& } ch.\overline{m+n} +$$

$$sh.\overline{m+n} = \frac{r^2}{ch.(m+n) - sh.(m+n)}. \text{ Substituant dans l'équation A les valeurs que nous ve-}$$

* Le logarithme de $pk = 1$ étant $= 0$, & le logarithme de po étant égal, par l'hypothèse, à la somme des logarithmes de pg & ph , les logarithmes de pk & po , seront les extrêmes d'une proportion arithmétique, dont les logarithmes de pg & ph seront les moyens; donc les nombres auxquels appartiennent ces logarithmes sont en proportion géométrique.

nous de trouver pour $ch. m + sh. m$, & $ch. n + sh. n$, & réduisant on aura $\frac{ch. (m+n) - sh. (m+n)}{r^2}$
 $= ch. (m + n) + sh. (m + n) =$
 $\frac{ch. m - sh. m \times ch. n - sh. n}{r^3}$; donc en ôtant
 les fractions, divisant par r^3 & transposant, on
 trouvera l'équation $ch. \frac{m+n}{r} - sh. \frac{m+n}{r} =$
 $\frac{(ch. m - sh. m) \times (ch. n - sh. n)}{r}$ (B).

Ajoutant l'équation B avec l'équation A (on
 peut regarder ces deux équations comme deux
 beaux Théorèmes), retranchant ensuite l'équa-
 tion B de l'équation A, on aura $ch. (m + n) =$
 $\frac{ch. m + sh. m \times ch. n + sh. n + ch. m - sh. m \times ch. n - sh. n}{2r}$
 $= \frac{ch. m \times ch. n + sh. m \times sh. n}{r}$ (C) & $sh. \frac{m+n}{r} =$
 $\frac{ch. m + sh. m \times ch. n + sh. n - (ch. m - sh. m \times ch. n - sh. n)}{2r}$
 $= \frac{ch. m \times sh. n + ch. n \times sh. m}{r}$ (D) ce qu'il falloit
 trouver.

84. PROBLÈME. Trouver le cosinus & le sinus de
 la différence des deux logarithmes m & n . Nous
 supposons $m > n$. Il suffit de mettre dans les deux
 dernières formules, à la place de $ch. n$ & $sh. n$,
 les quantités $ch. -n$ & $sh. -n$; mais $sh. -n$
 $= -sh. n$, & $ch. -n = ch. n$ (car si pr est
 supposé égal à un nombre $< 1 = pk$, le sinus
 sb de ce nombre est négatif; mais son cosinus pb
 est évidemment positif; donc il suffit dans les for-

mules précédentes de donner le signe — à $sh. n$ & l'on aura

$$ch. (m-n) = \frac{ch. m \times ch. n - sh. m \times sh. n}{r}$$

$$sh. (m-n) = \frac{ch. n \times sh. m - ch. m \times sh. n}{r}$$

Si l'on suppose $m = n$, qu'on ajoute l'équation D avec l'équation C, & qu'on retranche ensuite l'équation D de l'équation C, l'on aura ces deux autres équations

$$ch. 2m + sh. 2m = \frac{(ch. m + sh. m)^2}{r} \quad (F)$$

$$ch. 2m - sh. 2m = \frac{(ch. m - sh. m)^2}{r} \quad (G)$$

ajoutant G avec F & divisant par 2, retranchant ensuite G de F & divisant de même par 2, l'on a les deux équations suivantes.

$$ch. 2m = \frac{ch. m + sh. m^2 + ch. m - sh. m^2}{2r}$$

$$sh. 2m = \frac{ch. m + sh. m^2 - (ch. m - sh. m^2)}{2r}$$

Si avant d'ajouter & de retrancher les équations G & F on prend les racines quarrées de chaque membre, l'on aura

$$ch. m = \frac{ch. 2m + sh. 2m^{\frac{1}{2}} + ch. 2m - sh. 2m^{\frac{1}{2}}}{2.r^{\frac{1}{2}}}$$

$$sh. m = \frac{ch. 2m + sh. 2m^{\frac{1}{2}} - (ch. 2m - sh. 2m^{\frac{1}{2}})}{2.r^{\frac{1}{2}}}$$

Si aux deux logarithmes m & n on en ajoute un troisième, p , il suit des équations A. & B (83.) qu'on aura

$$\frac{ch. \overline{m + n + p} + sh. \overline{m + n + p}}{ch. (m + n) + sh. (m + n) \times ch. p + sh. p} =$$

$$\frac{ch. \overline{m + n + p} - sh. \overline{m + n + p}}{ch. (m + n) - sh. (m + n) \times ch. p - sh. p} =$$

$$\frac{ch. \overline{m + n + p} + sh. \overline{m + n + p}}{ch. \overline{m + n} \times ch. n + sh. n \times ch. p + sh. p} =$$

$$\frac{ch. \overline{m + n + p} - sh. \overline{m + n + p}}{ch. \overline{m + n} - sh. \overline{m + n} \times ch. n - sh. n \times ch. p - sh. p} =$$

Substituant dans ces équations les valeurs de $ch. \overline{m + n} + sh. \overline{m + n}$ & de $ch. \overline{m + n} - sh. \overline{m + n}$ prises des équations A & B, on aura ces deux autres Théorèmes :

$$\frac{ch. \overline{m + n + p} + sh. \overline{m + n + p}}{ch. \overline{m + n} \times ch. n + sh. n \times ch. p + sh. p} =$$

$$\frac{ch. \overline{m + n + p} - sh. \overline{m + n + p}}{ch. \overline{m + n} - sh. \overline{m + n} \times ch. n - sh. n \times ch. p - sh. p} =$$

$$\frac{ch. \overline{m + n + p} + sh. \overline{m + n + p}}{ch. \overline{m + n} \times ch. n + sh. n \times ch. p + sh. p} =$$

$$\frac{ch. \overline{m + n + p} - sh. \overline{m + n + p}}{ch. \overline{m + n} - sh. \overline{m + n} \times ch. n - sh. n \times ch. p - sh. p} =$$

Supposant $m = n = p$, ajoutant I à H & l'en retranchant ensuite, on aura

$$ch. 3m = \frac{ch. m + sh. m^3 + ch. m - sh. m^3}{2 \cdot r^2}$$

$$sh. 3m = \frac{ch. m + sh. m^3 - (ch. m - sh. m^3)}{2 \cdot r^2}$$

Si avant d'ajouter & de soustraire, on prend les racines cubiques, on trouvera

$$ch. m = \frac{ch. 3m + sh. 3m^{\frac{1}{3}} + ch. 3m - sh. 3m^{\frac{1}{3}}}{2 \cdot r^{\frac{2}{3}}}$$

$$sh. m = \frac{ch. 3m + sh. 3m^{\frac{1}{3}} - (ch. 3m - sh. 3m^{\frac{1}{3}})}{2 \cdot r^{\frac{2}{3}}}$$

En général on aura

$$c h. n m = \frac{c h. m^n + s h. m^n + c h. m - s h. m}{2 \times r^{n-1}}$$

$$s h. n m = \frac{c h. m^n + s h. m^n - (c h. m - s h. m)}{2 \times r^{n-1}}$$

n étant un nombre quelconque. En comparant ces formules avec celles des sinus & cosinus des arcs circulaires multiples, on verra qu'il y a une grande analogie entre les sinus & cosinus circulaires & les hyperboliques.

Nous appellerons *logarithmes hyperboliques simples*, ou *d'une dimension*, les logarithmes hyperboliques dont nous venons de parler; mais divisés par $\frac{r}{2}$, c'est-à-dire par la moitié du demi-axe $p a$ de l'Hyperbole équilatere, dont l'axe $= 2 r$ & les sinus & cosinus hyperboliques, dont nous venons de parler, pourront aussi être regardés comme les sinus & cosinus de ces logarithmes hyperboliques simples. Mais le triangle isocèle & rectangle $p a k$ donne $(p a)^2 = (p k)^2 + (a k)^2$ ou $r^2 = 2 \cdot (p k)^2$, ou $(p k)^2 = \frac{r^2}{2}$, $p k = \frac{r}{\sqrt{2}}$; & en divisant les logarithmes hyperboliques pris dans une Hyperbole équilatere dont le demi-axe $= r$, par $\frac{r}{2}$, ou, ce qui revient au même, en les multipliant par $\frac{2}{r}$, on aura ce que nous appellons *logarithmes hyperboliques simples*. Si l'on fait $p k = \frac{r}{\sqrt{2}} = 1$,

l'on aura $r^2 = 2$ & $r = \sqrt{2}$; donc $\frac{r}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} =$
 $\frac{1}{\sqrt{2}}$; c'est pourquoi si l'on divise les logarithmes hy-

perboliques vulgaires par $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ou qu'on les multiplie
 par $\sqrt{2}$, on aura les logarithmes hyperboliques sim-
 ples, pris dans la même Hyperbole dont le demi-
 axe $= \sqrt{2}$, & les premiers seront alors aux seconds,
 comme $1 : \sqrt{2}$ ou comme $\sqrt{2} : 2$.

85. THÉOREME. Dans toute Section Conique si une ligne
m p passant par le foyer *f* rencontre la directrice en *q* & la
 courbe en deux points *m*, *p*, le point *m* étant situé entre les
 points *f* & *q*, cette ligne sera divisée dans les points *m*
 & *f* (fig. 39.) & dans les points *m* & *q* (fig. 40.) en
 proportion harmonique. Car (voyez le n° 61) (dans la
 figure 29) les lignes *m p*, *m' p'* ont un rapport constant
 avec les rayons vecteurs *f m*, *f m'*, ce qui a lieu dans
 toute Section Conique; donc la raison de chaque rayon
 vecteur *f m* à chaque ligne correspondante *g m* sera constan-
 tante. En effet $f m : g m :: f m \times p m : g m \times p m$; donc
 la raison de *f m* : *g m* est composée de la raison constante
 de *f m* : *p m* & de la raison de *p m* : *g m* qui est la même
 que la raison du sinus d'inclinaison au sinus total, ce qui
 a lieu pour toutes les parallèles à *m g*, qu'on pourroit
 mener de la courbe à la directrice, & l'on doit dire la
 même chose de toutes les Sections Coniques, Parabole,
 Ellipse & Hyperbole. Cela posé, revenant aux figures 39
 & 40, l'on aura $f p : f m :: p q : m q$; or (fig. 39)
 dans les trois lignes *p q*, *f q*, *m q* les lignes *p q*, *m q*
 sont les extrêmes, & les droites *f p*, *f m* les différences
 des extrêmes à la moyenne; mais (fig. 40) dans les
 trois droites *f p*, *f q*, *f m* les lignes *f p*, *f m* sont les
 extrêmes, & les droites *p q*, *m q* les différences des ex-
 trêmes à la moyenne; donc dans les deux figures les
 extrêmes seront entre elles comme les différences des extrêmes
 à la moyenne, ce qui donne une proportion harmonique.
 Voyez encore nous avons dit sur la nature de cette pro-
 portion dans le Calcul (n° 40).

REMARQUE. La figure 39 peut servir pour l'ellipse & la parabole, (& même pour le cercle en supposant qn à une distance infinie du point f): La ligne qn représente la directrice.

Des Sections Coniques semblables.

85. Deux Sections Coniques de même espèce sont semblables lorsque leurs axes sont proportionnels.

COROLLAIRE I. Il suit de cette définition que si deux Ellipses ou deux Hyperboles semblables ont un centre commun c (fig. 41 & 43) & leurs axes sur les mêmes lignes, les Diamètres conjugués correspondants seront aussi sur les mêmes lignes. En effet ces Diamètres doivent faire avec les axes des angles égaux, puisque les Sections ne diffèrent l'une de l'autre que parce que les lignes de l'une sont plus grandes que les lignes correspondantes de l'autre: mais d'ailleurs elles sont semblablement situées & dans le rapport des axes; de sorte que si les axes & diamètres de la petite venoient à s'allonger, en conservant toujours leur même rapport, jusqu'à ce qu'ils fussent égaux à ceux de la grande, les deux Sections se confondroient.

COROLLAIRE II. Donc si une ligne rs coupe deux Sections Coniques semblables, qui ont un centre commun & situé sur le même axe aa' , les parties ro , so de cette ligne comprises entre les deux courbes seront égales. Car si l'on conçoit une tangente SR à la courbe intérieure parallèle à sr (fig. 41, 42 & 43), & le Diamètre xy qui passe par le point de contingence, la ligne oq sera une ordonnée à ce Diamètre; & parce que le Diamètre correspondant de la Section intérieure est sur la même ligne que celui de l'extérieure, il est visible que les lignes rs , RS seront des doubles ordonnées à la Section extérieure. Donc $rq = sq$, & $Rt = tS$. De même $oq = qo'$; donc $or = o's$; & par la même raison $om = in$, $dl = d'l$. Ce que nous venons de dire dans ce Corollaire a lieu pour la Parabole, qu'on peut regarder comme une Ellipse infinie.

87. THÉOREME. En supposant les paramètres de la parabole intérieure & extérieure égaux & situés sur la même axe, je dis qu'en faisant la tangente $dI = d$, l'on aura $m.o \times o.n = d^2$ (fig. 42). Par la propriété de la parabole extérieure on a $p \times ap = (mp)^2$ & par la

propriété de la parabole intérieure on a $p \times dp = (po)^2$; donc $(pm)^2 - (po)^2 = no \times mo = ap \times p - dp \times p = p.ad = (dL)^2 = d^2$; donc $mo \times on = d^2$.

REMARQUE I. Si au lieu de prendre les ordonnées à l'axe on avoit pris les ordonnées aux Diamètres xy , on auroit trouvé $ro \times os = (Rt)^2 = (tS)^2$.

REMARQUE II. Puisque les paraboles ne diffèrent que par leurs parametres, comme les cercles ne diffèrent que par la grandeur de leurs rayons, il est visible que les paraboles sont des figures semblables.

88. THÉOR. Dans les Ellipses & Hyperboles semblables (fig. 41 & 43) on aura toujours $ro \times os = (tR)^2$. Car appelons $2a$ le Diamètre xy , $2b$ son conjugué, y les ordonnées rq au Diamètre xy , Y les ordonnées oq de la courbe intérieure par rapport au Diamètre correspondant, $2c$ le Diamètre de la courbe intérieure, $2d$ son conjugué, & faisant $cq = x$, on a, par la propriété de l'Ellipse & de l'Hyperbole extérieures, $y^2 : \pm a^2 \mp x^2 :: b^2 : a^2$, & pour les courbes intérieures l'on a $Y^2 : \pm a^2 \mp x^2 :: d^2 : c^2$; mais parce que les courbes intérieures sont semblables aux extérieures, $b^2 : a^2 :: c^2 : d^2$; donc $y^2 : Y^2 :: \pm a^2 \mp x^2 : \pm a^2 \mp x^2$, & (dividendo) $y^2 - Y^2 (ro \times os) : y^2 :: \pm a^2 \mp c^2 : \pm a^2 \mp x^2 :: (tR)^2 : (qr)^2 = y^2$; donc $ro \times os : y^2 :: (tR)^2 : y^2$, & (alternando) $ro \times os : (tR)^2 :: y^2 : y^2$; donc $ro \times os = (tR)^2$.

COROLLAIRE I. Si les ordonnées appartiennent au premier axe, on auroit $mo \times on = (dL)^2 = g^2$ en faisant $dL = g$.

COROLLAIRE II. Supposant $mo = m$, & $on = \chi$, on aura par les Théorèmes précédents & le dernier Corollaire $m\chi = g^2$ (en supposant aussi pour la parabole (fig. 42) $dL = g$) ; donc χ devenant infini, ce qui arrive dans la parabole & l'hyperbole, l'on aura $m = \frac{g^2}{\chi} = \frac{g^2}{\infty} = 0$, c'est-à-dire qu'à l'infini la courbe intérieure se confond avec l'extérieure, ce qui n'arrive pas dans l'Ellipse, parce que dans cette courbe χ n'est jamais $= \infty$.

Avant de passer aux Sections Coniques des genres supérieurs, nous allons faire quelques re-

marques qui serviront à jeter un grand jour sur la théorie des courbes algébriques, dont nous traiterons dans la suite.

89. *Une courbe algébrique est celle dont la nature est exprimée par une équation algébrique, qui contient le rapport qu'il y a entre les ordonnées & les abscisses.* Les ordonnées aussi-bien que les abscisses sont positives ou négatives. En prenant pour positives les abscisses qui, à compter d'un point fixe, tendent vers la droite, les abscisses qui tendent vers la gauche sont négatives & réciproquement. On voit bien que les ordonnées supérieures étant supposées positives, les inférieures seront négatives étant dirigées dans un sens opposé aux premières, & réciproquement. Il est indifférent de prendre pour positives les abscisses de la droite ou de la gauche, les ordonnées supérieures ou inférieures; mais dès qu'une fois cela est déterminé, il n'y faut plus rien changer, du moins en traitant la même question.

On peut rapporter à l'axe tous les points d'une courbe par des ordonnées parallèles entr'elles & perpendiculaires, ou obliques à cet axe. On peut prendre l'origine des abscisses sur la courbe, comme nous l'avons fait dans la parabole; dans la courbe, comme nous l'avons fait pour le cercle & l'ellipse; en prenant l'origine des abscisses au centre, ou hors de la courbe, ainsi que nous l'avons fait dans l'hyperbole, en prenant l'origine des abscisses au centre, qui est un point situé hors de la courbe. Sur quoi nous remarquerons que l'origine des abscisses ne peut être située sur un point de la courbe que lorsque tous les termes de son équation sont affectés des indéterminées x ,

ou y . Quant au contraire l'équation contient un terme entièrement délivré de x & de y , alors l'origine des abscisses ne peut être sur un point de la courbe. Dans les équations $y^2 = a^2 - x^2$, $y^2 = 2ax - x^2$, par exemple, qui appartiennent au cercle, en faisant $x = 0$, on trouve $y = \pm a$ dans la première, & $y = 0$ dans la seconde : or y doit être $= 0$, lorsque l'origine des abscisses est sur la courbe ; mais y ne doit pas être $= 0$, lorsque cette origine n'est pas sur la courbe ; c'est pourquoi dans la première équation qui appartient au cercle, en comptant les abscisses depuis le centre & supposant les coordonnées perpendiculaires entr'elles, y n'est pas $= 0$ lorsque $x = 0$.

Pour démontrer cela généralement, soit l'équation d'une courbe algébrique $ax^m + bx^n y^p = dy^q$. En faisant $x = 0$, on a $dy^q = 0$ & $y^p = 0$; donc l'origine des abscisses est sur la courbe, puisque y & x deviennent 0 en même temps ; mais si l'équation de la courbe étoit $ax^m + bx^n y^p + dy^q - g = 0$; en faisant $x = 0$, on auroit dy^q

$= g$, ou $y^q = \frac{g}{d}$, ou $y = \sqrt[q]{\frac{g}{d}}$; donc l'ori-

gine des abscisses n'est pas sur la courbe, puisque à $x = 0$, ne répond pas $y = 0$.

90. Toute courbe peut être considérée comme polygone, ou comme courbe rigoureuse. La première façon de considérer une courbe, ne signifie autre chose sinon que la courbe est la limite du polygone inscrit & circonscrit. Par exemple, si à un même cercle on inscrit & on circonscrit deux polygones réguliers, il est visible qu'en augmentant le nombre des côtés de ces polygones, ils approcheront continuellement de l'égalité avec le cercle, qui est la limite qu'ils ne peuvent passer, de laquelle cependant ils

peuvent approcher tant qu'on voudra. Mais il est bon d'observer que si on a considéré une courbe comme polygone, on ne doit plus la regarder (du moins dans la solution de la même question) comme une courbe rigoureuse; & si dans la résolution d'un problème on a besoin de considérer deux courbes, on ne doit pas en considérer une comme polygone & l'autre comme courbe rigoureuse, autrement on pourroit tomber dans quelque erreur. Par exemple, menant dans un cercle quelconque les cordes évanouissantes pd , dc , faisant le prolongement do de la corde pd (fig. 44), égal à $dc = pd$, tirant par c & o la ligne oc , & par le point d la tangente dn , on aura $oc = 2nc$: car à cause de $od = dc$, le triangle odc est isocèle & l'angle $o =$ l'angle c . D'ailleurs l'angle odc a pour mesure la moitié de l'arc pdc (Géo. 27) ou dc , & l'angle ndc a pour mesure la moitié de dc ; ainsi $ndc = ndo$; donc la ligne dn divise en deux également l'angle d du triangle isocèle odc ; donc dn divise en deux également oc . En effet les triangles odn , ndc sont égaux en tout, puisqu'ils ont deux angles égaux situés sur les côtés égaux dc , do ; donc $nc = on$, & $co = 2nc$. Cela posé, supposons un corps p décrivant un petit arc de cercle pdc par le moyen d'une force qui le pousse vers le centre C , & d'une autre force qui au point d retire ce corps de la ligne droite. Si l'on considère le cercle comme un polygone, la corde infiniment petite pd sera l'espace parcouru pendant l'instant précédent, & do sera l'espace que le corps décriroit dans l'instant suivant. C'est pourquoi si l'on mène oc parallèle à la direction dC de la force qui agit en d , oc sera l'effet de cette force, c'est-à-dire la quantité dont cette force l'aura rapproché du centre du cercle. En effet, à cause de l'arc dc infiniment petit, l'angle $dCo = \angle oc$, son alterne interne, sera infiniment petit, & l'on pourra regarder le triangle rectangle oc comme isocèle, c'est-à-dire on pourra supposer $co = oc$; mais si l'on considère le cercle comme une courbe rigoureuse, la tangente dn sera l'espace que le corps décriroit, tandis que nc exprimera l'effet de la force qui agit en d pour retirer le corps de la ligne droite dn . C'est pourquoi dans la courbe rigoureuse l'effet de cette force exprimé par cn est la moitié de l'effet oc dans la courbe polygone. Donc si on ne veut avoir un effet différent, il faut toujours considérer la courbe de la même manière, parce qu'alors on a toujours le même rapport dans les effets; or dans la théorie des forces, c'est à ce rapport

seul qu'on fait attention *. De plus si on suppose qu'un corps est animé d'une force accélératrice constante, qui le pousse continuellement vers un centre, & d'une force tangentielle, non accélératrice, qui le pousse selon la tangente d'une courbe, il doit parcourir un arc de courbe & non une ligne droite. Ainsi on ne peut alors supposer, sans détruire en même temps la supposition, que le corps parcourre un polygone.

Des Sections Coniques des genres supérieurs.

91. Si on a une courbe amA (fig. 45.) dans laquelle faisant la ligne aA (que j'appellerai *l'axe*) $= 2a$, l'abscisse ap comptée du sommet $= x$, l'ordonnée $pm = y$, on ait $x^m : y^m :: y^n : (Ap)^n = (2a - x)^n$, l'on aura l'équation $y^{m+n} = x^m (2a - x)^n$, qu'on appelle *équation des cercles des genres supérieurs*. On les appelle ainsi à cause de l'analogie qu'a leur équation avec celle du cercle ordinaire, qui est telle qu'en supposant $m = n = 1$, on aura $y^2 = 2ax - x^2$ équation au cercle vulgaire **. Si on compte les abscisses du milieu c de l'axe, l'on aura $y^{m+n} = (a - x)^m \times (a + x)^n$; & si dans la première équation on suppose $aA = a$, on aura $y^{m+n} = x^m (a - x)^n$. Si dans l'équation $y^{m+n} = x^m (a - x)^n$ on suppose successivement $m = 1, 2, 3, 4, 5$, &c. & $n = 1$, on aura ce qu'on appelle le premier cercle de tous les genres, c'est-à-dire $y^2 = ax - x^2$, $y^3 = ax^2 - x^3$, &c. Si on fait $m = 3$ & $n = 2$, on aura $y^5 = x^3 (a - x)^2$ qui exprime le second cercle du cinquième ordre ou genre, & en

* Cela peut avoir son utilité dans la théorie des forces centrales.

** En décrivant ces sortes de cercles, on verra qu'ils ne sont pas ronds comme le cercle vulgaire; mais qu'ils ont différentes formes, selon la nature de leur équation.

faisant $m = 2$ & $n = 3$, on aura $y^3 = x^3(a-x)^3$, troisième cercle du cinquième genre. En général le cercle d'un genre quelconque est dit premier, second, troisième, &c. selon que n (exposant du reste de l'axe) est $= 1, 2, 3$, &c.

REMARQUE. Nous estimons le genre de la ligne par le degré de son équation; mais on peut aussi commencer à compter les genres depuis le cercle ordinaire, qu'on prendra pour le cercle du premier genre, & alors le cercle que nous avons appelé du cinquième genre sera seulement du quatrième; de sorte que le cercle de l'équation $y^{m+1} = ax^m - x^{m+1}$ sera seulement du genre $m+1-1 = m$. On voit que cela est indifférent*.

92. Toutes les paraboles peuvent être représentées par l'équation $y^{m+n} = a^m x^n = x^n$, en supposant $a = 1$. Dans toutes ces courbes faisant $x = 0$, on a aussi $y = 0$. De même en supposant x infinie, y est aussi infinie, pourvu qu'elle ne soit pas imaginaire. La diversité des exposants m & n détermine la position des branches d'une parabole. Supposons, pour plus de facilité, que l'on prenne la racine $m+n$ de l'un & l'autre membre de l'équation générale pour avoir $y =$

$\sqrt[m+n]{a^m x^n}$. Si m & n sont des nombres impairs & positifs, $m+n$ sera un nombre pair, & x^n sera une quantité positive; donc y sera la racine d'un degré

* En estimant le genre de la ligne par le degré de l'équation, il n'y aura aucune courbe du premier genre, parce que, comme nous le verrons dans la suite, une équation du premier degré à deux variables x & y , ne représente qu'une ligne droite.

pair d'une quantité positive ; donc y aura deux valeurs , l'une positive , l'autre négative ; & du côté des abscisses positives cb (fig. 46.) , la courbe aura deux branches cp , cq , l'une du côté cn des ordonnées positives , l'autre du côté cm des ordonnées négatives. Si on suppose x négatif , x^n sera une quantité négative , & y deviendra imaginaire étant la racine paire d'une quantité négative (on suppose a positif) ; donc du côté ca des x négatives la courbe n'a aucune branche. Si l'équation étoit $y^{m+n} = -a^m x^n$, dans ce cas x étant négatif on auroit $y^{m+n} = a^m x^n$: ainsi la courbe auroit deux branches du côté des abscisses négatives , mais elle n'en auroit aucune du côté des x positives. Supposons maintenant que m étant paire n soit impaire , afin que $m + n$ soit un nombre impair. En supposant x positif , x^n sera aussi positif ; ainsi y sera la racine impaire d'une quantité positive , qui a une seule racine réelle & positive * ; donc la courbe n'a qu'une seule branche cp du côté des abscisses & des ordonnées positives (fig. 47.). Mais en supposant x négatif x^n sera aussi négatif ; donc y sera la racine impaire d'une quantité négative , qui ne peut avoir qu'une seule valeur réelle & négative ; donc la courbe a une autre branche cq dont les abscisses & les ordonnées sont négatives. Dans l'équation $y^{m+n} = -a^m x^n$, aux

* Cela est évident en supposant l'équation $x^3 = c^3$, qui donne $x = \sqrt[3]{c^3} = c$. Les deux autres racines qu'on auroit en divisant $x^3 - c^3 = 0$ par $x - c = 0$ sont imaginaires. En effet le quotient $x^2 + cx + c^2 = 0$, donne $x = -\frac{c}{2} \pm \frac{c}{2} \sqrt{-3}$.

abscisses positives répondent des ordonnées négatives, & des ordonnées positives aux abscisses négatives.

Supposons ensuite que n étant paire, m soit impaire : x étant positif, x^n sera aussi positif, on aura donc comme auparavant une branche cp (fig. 48.) du côté des x & des y positifs ; mais parce que toute puissance paire d'une quantité négative est positive, x étant négatif, on aura x^n positif ; donc y sera une racine impaire d'une quantité positive ; donc la courbe aura une autre branche cq du côté des abscisses négatives & des ordonnées positives. Dans l'équation $y^{m+n} = -a^m x^n$ l'une & l'autre branche sera située du côté cm des ordonnées négatives.

Supposons enfin que m & n soient paires, $m+n$ sera paire. Prenant x positif ou négatif, x^n sera toujours positif ; donc y sera la racine paire d'une quantité positive ; donc y a deux valeurs, l'une positive, l'autre négative ; & cela pour chaque x positive ou négative ; donc la courbe (fig. 49.) aura quatre branches, & s'étendra tant du côté des x & des y positifs, que du côté des x & y négatifs. Mais la courbe de l'équation $y^{m+n} = -a^m x^n$ sera dans ce cas entièrement imaginaire.

Remarquons en passant que la parabole de l'équation $x^{m+n} = a^m y^n$ est la même que celle dont nous venons de parler, avec cette différence seulement que les ordonnées de celle-ci sont parallèles aux abscisses de la première & les abscisses parallèles aux ordonnées. En supposant $m = 4$ & $n = 1$, on aura $y' = a^4 x$, équation à la première parabole du cinquième genre, faisant $m = 3$, $n = 2$, on aura $y' = a^3 x^2$, seconde parabole du

cinquième genre. En général on a les premières paraboles en faisant $n = 1$, les secondes en faisant n (exposant de l'abscisse) $= 2$, les troisièmes en faisant $n = 3$, &c.

93. Si dans la courbe amA (fig. 45.) on suppose que $y^2 : ap \times Ap = ax - x^2 :: p : a$,

on aura l'équation à l'Ellipse $\frac{a}{p}y^2 = (ax - x^2)^*$.

Mais si l'on suppose que $y^{m+n} : x^m \times (a-x)^n :: p : a$, on aura $\frac{a}{p}y^{m+n} = x^m (a-x)^n$, équation aux Ellipses des genres supérieurs.

Pour avoir la première Ellipse du cinquième genre, par exemple, on fera $n = 1$; pour avoir la seconde, on fera $n = 2$, &c.

94. Dans l'Hyperbole en appelant le premier axe a , le paramètre p , on a $\frac{a}{p}y^2 = ax + x^2$ *. Mais si on fait $y^{m+n} : x^m \times (a+x)^n :: a : p$, d'où l'on tire $\frac{a}{p}y^{m+n} = x^m (a+x)^n$, on aura

l'équation aux Hyperboles des genres supérieurs. Les premières, secondes, troisièmes, &c. Hyperboles du septième genre, par exemple, se déterminent en faisant $n = 1, 2, 3$, &c.

REMARQUE. Si l'exposant $m+n$ de y est un nombre impair, y ne peut avoir qu'une racine réelle, & seulement deux racines réelles si cet ex-

* En divisant par a & multipliant par p , on trouvera $y^2 = px - \frac{p^2 x^2}{a}$; donc en mettant $2a$ au lieu de a ,

aurait $y^2 = px - \frac{p^2 x^2}{2a}$, équation trouvée ci-dessus (n° 31).

** On suppose ici l'axe $= a$ & le paramètre $= p$.

posant est pair ; donc dans le premier cas à chaque abscisse il ne peut répondre qu'une ordonnée , & deux dans le second cas ; donc dans le premier cas il n'y a qu'une seule branche du même côté de l'axe ; mais il y en a deux dans le second cas. Cette Remarque a également lieu pour les cercles , ellipses & paraboles des genres supérieurs. On va voir aussi que c'est la même chose pour les Hyperboles des genres supérieurs rapportées aux asymptotes.

95. Si on fait $x^m : a^m :: y^n : a^n$, on aura $x^m y^n = a^{m+n}$, équation aux Hyperboles des genres supérieurs rapportées à leurs asymptotes *. De cette équation il est aisé de tirer $y^n = \frac{a^{m+n}}{x^m}$. Si on suppose x infiniment petit , on a $y^n = \infty$, & $y = \sqrt[n]{\infty}$. Mais en supposant $x = \infty$, on a $y^n = 0$, & $y = 0$. De l'équation $y^n = \frac{a^{m+n}}{x^m}$, on tire $y = \sqrt[n]{\frac{a^{m+n}}{x^m}}$, équation qui fournit les conclusions

suivantes. Si m & n sont impaires , ce qui arrive dans l'Hyperbole ordinaire , en supposant x positif , x^m sera aussi positif ; donc y sera une racine impaire d'une quantité positive ; donc y n'a qu'une seule valeur réelle. C'est pourquoi la courbe aura une branche p (fig. 50.) du côté des abscisses & des ordonnées positives. Si x est négatif , x^m le sera aussi , & y sera la racine impaire d'une quan-

* On peut aussi faire $x^n : a^n :: a^{m-n} : y^{m-n}$; d'où l'on tire $a^m = y^{m-n} x^n$ autre équation aux Hyperboles , qui donne les mêmes résultats que la première.

tité négative, racine qui n'a qu'une seule valeur réelle, mais négative; donc il en résultera une autre branche q du côté des x & des y négatifs.

Si n est impaire & m paire, prenant x positif ou négatif, x^m sera toujours positif; donc y sera la racine impaire d'une quantité positive, qui n'a qu'une valeur réelle & positive; donc la courbe (fig. 51.) sera composée de deux branches p & q , dont la première a les abscisses & les ordonnées positives, la seconde ayant les abscisses négatives & les ordonnées positives.

Si n est paire & m impaire, x étant positif, x^n le sera aussi, & y sera la racine paire d'une quantité positive, qui a deux valeurs, l'une positive, l'autre négative; donc la courbe aura deux branches, l'une p (fig. 52.) du côté des ordonnées positives, l'autre q du côté des y négatifs. Si x est négatif, x^m le sera aussi; donc y racine paire d'une quantité négative fera imaginaire; donc la courbe n'a aucune branche du côté des x négatifs. Dans tous les cas dont nous venons de parler, si l'équation étoit $x^m y^n = -a^{m+n}$, il en résulteroit les mêmes Hyperboles en changeant les x & les y positifs en négatifs & réciproquement.

Enfin supposant que m & n sont des nombres pairs, pour x positif ou négatif, on aura toujours x^m positif, & y racine paire d'une quantité positive aura deux valeurs, l'une positive & l'autre négative correspondantes à chaque x positif ou négatif; donc la courbe (fig. 53.) est composée de quatre branches p, g, q, r qui s'étendent tant du côté des x & y positifs, que du côté des x & y négatifs. Mais les branches de la courbe

dont l'équation seroit $x^m y^n = -a^{m+n}$ sont dans ce cas imaginaires.

REMARQUE. Les Hyperboles dont nous venons de parler dans ce dernier cas, ne sont autre chose que les Hyperboles des cas précédents unies ensemble. Car en prenant la racine quarrée jusqu'à ce que l'un des exposants de x ou de y , ou tous les deux soient impairs, on aura une équation, dans laquelle, à cause du double signe \pm , il se présentera deux Hyperboles qui appartiendront à quelqu'un des cas ci-dessus. Il est visible qu'il faut raisonner de même par rapport à l'équation à la parabole $y^{m+n} = a^m x^n$, lorsque m & n sont des nombres pairs.

96. Disons un mot des Courbes, qu'on nomme *Paraboloïdes*. On appelle ainsi toutes les courbes dans lesquelles l'ordonnée y multipliée par une constante $= 1$, ou différente de l'unité, est égale à une fonction rationnelle & entière de x . Telle est la courbe de l'équation $a^2 y = x^3 + b x^2 + d^2$. L'équation générale des paraboloïdes est $a^{m-1} y = x^m + b x^{m-1} + a c x^{m-2} + \dots + a^{m-1} k$.

Parce que y ne monte qu'au premier degré, il est évident que sa valeur est toujours réelle, soit qu'on suppose x positif ou négatif; donc la courbe (fig. 54.) n'est point interrompue, mais elle s'étend à l'infini du côté des x positifs & du côté des x négatifs. Si l'on suppose x infini soit positif, soit négatif, en négligeant tous les termes, qui, en comparaison de x^m sont regardés comme 0,

on trouve l'équation $y = \frac{x^m}{a^{m-1}}$. Dans cette même supposition de $x = \infty$, si m est impair y sera positif si x est positif, & négatif si x est

négatif. Mais une courbe continue, dans laquelle y doit passer du positif au négatif, doit nécessairement couper la ligne des abscisses; or elle la coupera ou en un, ou en trois, ou en cinq &c. points: en sorte que le nombre des intersections sera impair. En effet supposons que la courbe est passée des y positifs aux négatifs en coupant une fois la courbe, si elle repasse du côté des y positifs en coupant une seconde fois la courbe, elle ne peut repasser du côté des y négatifs qu'en coupant trois fois la courbe, & ainsi de suite; donc &c. si m est paire x étant infini, positif ou négatif, x^m sera toujours positif aussi-bien que y ; or une courbe continue, dans laquelle y répondant à un x infini, positif ou négatif, est toujours positif, ne coupera point du tout la ligne des abscisses, ou la coupera en deux, en quatre, en six &c. points, en sorte que le nombre des intersections sera pair. En effet en passant d'abord des y positifs aux négatifs, il doit se faire une intersection, & pour repasser aux y positifs il doit s'en faire une seconde, & ainsi de suite. Si dans le dernier terme k est négatif, en supposant $x = 0$, on aura $y = -k$; donc dans ce cas il y aura au moins deux intersections. En effet x étant positif & d'une certaine grandeur, y le sera aussi évidemment; mais x étant $= 0$, y devient négatif; donc la courbe coupe une fois la ligne des abscisses avant que x devienne 0, & comme y est positif lorsque x négatif est infini, la courbe repasse nécessairement du côté des y positifs; donc &c.

97. COROLLAIRE I. Il suit de ce que nous venons

G 4

de dire , que toute équation d'un degré impair a au moins une racine réelle , & si elle en a plusieurs leur nombre est impair. Car supposons tous les termes de l'équation égaux à y , en concevant décrite la courbe que représente cette équation & dont ab soit la ligne des abscisses , il est visible que les racines réelles de cette équation se trouveront en faisant $y = 0$ * ; or y est 0 au point où la courbe coupe la ligne des abscisses ; donc les abscisses comprises entre l'origine & les points d'intersection sont les racines réelles de l'équation. Mais on a prouvé qu'il y a au moins un point d'intersection , & que quand il y en a plusieurs ils sont toujours en nombre impair ; donc une équation déterminée ** d'un degré impair a au moins une racine réelle , & si elle en a plusieurs elles sont toujours en nombre impair. Si l'intersection avoit lieu à l'origine des abscisses , il y auroit une racine $= 0$, & le dernier terme manqueroit. De là on peut conclure que les racines imaginaires sont toujours en nombre pair dans une telle équation. Car si d'un nombre impair de racines vous ôtez un nombre impair de racines réelles , il restera un nombre pair de racines imaginaires.

98. COROLLAIRE II. Les équations de degré pair n'ont aucune racine réelle , ou en ont toujours un nombre pair. Car supposant la somme des termes d'une équation de degré pair égale à y , la courbe doit couper la ligne aB (fig. 55.) des abscisses

* C'est la même chose que de faire la somme de tous les termes d'une équation égale à 0.

** Une équation déterminée est celle qui ne contient qu'une inconnue.

dans un nombre pair de points, ou ne la point couper du tout, ainsi que nous l'avons déjà prouvé. Mais si le dernier terme de l'équation est négatif, la Courbe coupant alors la ligne des abscisses au moins en deux points, l'équation déterminée aura au moins deux racines réelles; & en général il y aura autant de racines réelles qu'il y aura de points d'intersection; donc il y aura un nombre pair de racines réelles; donc les racines restantes, s'il y en a, seront en nombre pair & imaginaires.

99. COROLLAIRE III. Il suit des deux Corollaires précédents, que dans toute équation rationnelle & déterminée, les racines imaginaires, s'il y en a, sont toujours en nombre pair, ce qu'on fait d'ailleurs.

De quelques usages des Sections Coniques.

100. On fait usage de la Parabole & de l'Ellipse dans la construction des vaisseaux. Lorsqu'on veut donner beaucoup de façons à un vaisseau, on se sert de la Parabole pour placer le *maître couple* (c'est le plus grand couple du vaisseau). Ayant décrit un rectangle $m n b a$ (fig. 56.), dont la longueur $m n$ est égale à celle du *baux*, & la hauteur $m a$ est le *creux du navire* (c'est-à-dire, est égale à sa profondeur, à compter depuis le *baux*); de part & d'autre du milieu q de $a b$, on prend les lignes $q g$, $q h$ égales au *semi-plat de la varangue* (les varangues sont les pièces qui portent immédiatement sur la quille, le demi-plat est leur longueur horizontale compté à droite ou à gauche de la quille en allant vers b ou vers a , & joignant les deux demi-longueurs ensemble, l'on aura la longueur entière); & ayant mené $g o$, $h o$ perpendiculaires à $b a$ & égales chacune à l'*acculement* (l'acculement est la distance de l'extrémité o de la varangue à la ligne horizontale $a b$), on décrit deux paraboles égales $m o$, $n o$, dont l'axe commun est la ligne $m n$, & qui doivent passer par les points o & o . Pour pouvoir décrire ces pa-

rales, il suffit de trouver leur parametre ; or en prolongeant $h o$ jusques en l , & prenant une ligne troisième proportionnelle à l'abscisse $n l$ & à l'ordonnée $o l$, on aura le parametre cherché (19.). Le parametre p étant connu avec les sommets m & n , il sera aisé de tracer ces paraboles. Pour tracer les demi-varangues $q o$, ayant tiré la ligne droite $q i o$, on la partagera en i en deux également ; on partagera aussi $i o$ en deux parties égales en r , & par le milieu r on lui menera la perpendiculaire $r k$ jusqu'à la rencontre de la ligne $o x$ déterminée, en faisant $l x = \frac{p}{2}$, ce qui fait voir que $x o$ est la normale de

la parabole par rapport au point o (12.). Du point k comme centre, & de l'intervalle $k o$ on décrira un petit arc de cercle $o i$, qui touchera évidemment la parabole en o , puisque le centre de ce cercle se trouve sur un point k de la perpendiculaire à la tangente en o de la parabole, ce qui fait que cette tangente appartient à la parabole & à l'arc $o i$. Ayant tiré $k i$ & fait le prolongement $i t = i k$, du point t comme centre & de l'intervalle $t i$, on décrira un petit arc $i q$ * concave du côté de t , lequel touchera l'arc $i o$ en i , puisque ces deux arcs ayant leurs centres sur la même ligne, leurs rayons doivent être perpendiculaires à une tangente commune qu'on meneroit par le point i à l'un des deux arcs. On s'y prendra de même pour achever l'autre moitié ; mais on se sert de l'Ellipse lorsqu'on veut donner beaucoup de capacité à un vaisseau.

101. Supposant que $m n$ (fig. 57.) représente la demi largeur du vaisseau **, $m M$ la ligne du creux, $M q$ le demi-plat de la varangue, $M b$ l'acculement. Prenez $c s = m n$, sur $c s$ comme côté, construisez le quarré $c x y s$, du point c & du rayon $c s$ décrivez le quart de cercle $s o x$, partagez $c x$ en un grand nombre de parties égales, par les points de divi-

* Puisque $i k = i t = k o$, il est visible que le cercle décrit du point t avec le rayon $i t$, doit passer par les extrémités i & q de la ligne $i q$, comme l'arc de cercle décrit du point k avec le rayon $k i$ passe par les extrémités i & o de la ligne $i o = i q$.

** Nous l'appellons ainsi, quoique la vraie demi-largeur $q g$ soit plus grande de la quantité $q M$.

sion tirez des paralleles à xy , divisez $mb = ni$ en un même nombre de parties égales, portez chaque oh sur la division correspondante en prenant $OH = oh$, & vous aurez une partie nb de la moitié du maître couple. Pour avoir la partie inférieure tirez la ligne bq , sur le milieu z de laquelle vous menerez la perpendiculaire kz jusqu'à la rencontre en k du prolongement de mb . Du point k comme centre avec le rayon $kb = qk$, vous décrirez l'arc bq pour avoir la moitié nbq du maître couple, l'autre moitié se construit de même. Il nous reste à faire voir que la courbe nOb est elliptique. Soit supposée mn le petit demi-axe, mb le demi-grand axe d'une Ellipse. Par construction les lignes nH , ni sont dans le rapport de $sh : sy$; puisque les points h & H sont supposés situés sur des divisions correspondantes; donc on a $sy = cx = mn$: $sh = po :: ni = mb : nH = uO$; donc $mb : uO :: cx : po$. Ou (*alternando*) $mb : cx :: uO : po$; c'est-à-dire que les ordonnées à la courbe nOb & au quart de cercle sox sont toujours dans le rapport constant du demi-axe mb au rayon du cercle cx , ou du demi-grand axe mb au petit demi-axe nm ; donc la courbe nOb appartient à une Ellipse *. De plus b étant l'extrémité du demi-grand axe, la ligne bi perpendiculaire sur mb est évidemment tangente de l'Ellipse; or elle est aussi tangente de l'arc circulaire bq , puisqu'elle est perpendiculaire sur l'extrémité b du rayon kb de cet arc; donc cet arc touche l'Ellipse en b .

102. PROBLÈME. Supposant que le ressort d'une montre soit tel qu'en se débandant sa force décroisse comme les lignes ni , no , sh &c. (fig. 58.), ou comme les éléments du triangle mpi , on demande la figure que doit avoir la fusée xy pour que le mouvement de la montre soit toujours uniforme. Soit mp la force du ressort au commencement de son débandement, sh sa force, lorsque la fusée est entièrement devidée, mi l'axe de la courbe cherchée. Soit $= y$ l'ordonnée nt qui représente le levier, à l'extré-

* Car en faisant $mb = a$, $cx = b$, $uO = y$, $cp = mu = x$, $po = z$, l'on aura $aa : bb :: y^2 : z^2$. Mais par la propriété du cercle, $z^2 = bb - xx$; donc $y^2 = \frac{aa}{bb} (bb - xx)$.

mité duquel agit la force no . Parce que le produit de la force $no \times y$ doit être constant *, soit ce produit $= a.d$. En supposant $si = b$ & $hs = d$, les triangles semblables sih , ino donnent $is:sh :: in:no$, ou (en faisant $sn = p$) $b:d :: b+p:no = \frac{d \times (b+p)}{b}$;

mais $no \times y = a.d$; donc $no = \frac{a.d}{y} = \frac{d.(b+p)}{b}$;

donc $a.b.d = d \times (b+p) \times y$, ou $\frac{a.d.b}{d} = (b+p)$

$\times y$, ou $ab = c^2 = x.y$, en supposant c moyenne proportionnelle entre a & b , & $x = b+p$; or cette équation appartient à l'Hyperbole rapportée à ses asymptotes ; donc, dans cette supposition, la fusée de la montre doit avoir la figure d'un hyperboloïde formé par la révolution d'une Hyperbole autour de son asymptote.

La Parabole & l'Ellipse sont d'un grand usage dans l'Astronomie pour calculer le mouvement des Comètes & des Planètes. Dans la seconde édition de nos Institutions Mathématiques, nous avons fait des applications très-intéressantes de ces courbes à la Théorie des Forces Centrales, à l'Astronomie Physique, à la Dioptrique & Catoptrique, auxquelles nos Lecteurs pourront avoir recours, s'ils le jugent à propos.

DES COURBES ALGÈBRIQUES.

1. **N**ous avons déjà dit dans les Sections Coniques (89.) qu'une Courbe Algébrique est une Courbe exprimée par une équation algébrique, qui contient le rapport qu'il y a entre les ordonnées & les abscisses. Les *lignes algébriques* sont dites du premier, second, troisième &c. ordre, selon que leur équation est du premier, second, troisième &c. degré. Ainsi l'équation au cercle $y^2 =$

* Afin que le mouvement des roues soit uniforme.

$a^2 - x^2$, ou en transposant, $y^2 + x^2 - a^2 = 0$ est du second degré, & le cercle est une ligne algébrique du second ordre. L'équation $y^3 = ax^2$, ou $y^3 - ax^2 = 0$ représente une ligne du troisième ordre. En général une ligne d'un ordre quelconque peut être représentée par l'équation $fy^m + gx^n + hy^r x' + l = 0$, en prenant pour fy^m tous les termes qui ne contiennent qu'une seule puissance de y , pour gx^n tous ceux qui ne contiennent qu'une seule puissance de x , pour $hy^r x'$ tous ceux qui contiennent à la fois x & y . Mais l représentera le terme constant ou les termes constants s'il y en a plus d'un, & l'on fera $l = 0$, s'il n'y a point de terme constant dans l'équation. Ainsi s'il s'agit de l'équation $ay^3 + cy + bx + dx^3 + pxy + qxy^2 + g = 0$, fy^m représentera ay^3 & cy , gx^n représentera bx & dx^3 , $hy^r x'$ représentera d'abord pxy , & ensuite qxy^2 , enfin l'on fera $l = g$.

2. PROBLÈME. *Etant donnée l'équation d'une courbe algébrique (qu'on appelle aussi géométrique), décrire cette courbe* (fig. 1.). Supposons les ordonnées perpendiculaires aux abscisses, & donnons aux abscisses x plusieurs valeurs successives depuis 0 jusqu'à ∞ , & pour chacune de ces valeurs cherchant les valeurs correspondantes de y , on menera aux points correspondants les ordonnées pm positives ou PM négatives, & par les points m , M &c. on tracera la courbe mcM . Par exemple, pour décrire la courbe de l'équation $y^3 - ax^2 = 0$, supposant $x = 0$, on aura $y = 0$; donc prenant le point c pour l'origine des abscisses, la courbe passera par ce point. Faisant ensuite $x = 1$, on aura $y^3 = a$ & $y = \sqrt[3]{a}$; & supposant $a = \frac{1}{8}$, on

aura $y = \frac{1}{2}$. * Prenant donc $ca = x = 1$, on mettra l'ordonnée $ba = \frac{1}{2}$, & le point b appartiendra à la courbe. Faisant $x = 2$, on aura $y^3 = 4a = \frac{1}{2}$, & $y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$; prenant donc $cp = x = 2$, on prendra $pm = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ (ce qu'on peut faire du moins par approximation, en se servant des décimales). Faisant ensuite successivement $x = 3, 4$, &c. $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, $2\frac{1}{2}$, &c. on cherchera les valeurs correspondantes de y . Faisant de même $x = -1, -2$, &c. on aura les valeurs de y correspondantes aux abscisses négatives. Faisant passer une courbe par les extrémités de tous les y trouvés, on aura la courbe Mcm d'autant plus exactement qu'on aura pris les y plus proches l'un de l'autre, & qu'on aura trouvé des valeurs plus exactes de ces y .

Exemple second : soit l'équation de la courbe, $y = \sqrt{x} + \sqrt[4]{x^3}$. Je remarque d'abord qu'en prenant ba (fig. 2.) pour l'axe & a pour l'origine des abscisses, la courbe ne doit avoir aucune branche du côté des x négatifs; car en supposant x négatif l'on aura $y = \sqrt{-x} + \sqrt[4]{-x^3}$ quantité imaginaire. On ne peut pas non-plus prendre le radical $\sqrt{-x}$ en $-$, car alors $\sqrt[4]{x^3}$ deviendrait $\sqrt[4]{(-x.\sqrt{x})}$, quantité imaginaire. Supposant maintenant $x = 1$, nous aurons $y = 1 + 1$, ou $y = 2$ & $y = 0$; donc en prenant $ab = 1$, une

* a peut désigner $\frac{1}{8}$ de pied ou de ponce, &c. cela est arbitraire. Si a désigne $\frac{1}{8}$ de pied, l'unité de ligne désignera 1 pied, & si a désigne $\frac{1}{8}$ de ponce, l'unité de ligne désignera 1 ponce.

des branches am de la courbe rencontrera l'axe en b , l'autre branche an passera par le point n , extrémité de l'ordonnée $bn = 1$. Si $x = aP = \frac{2}{10}$, l'on aura (par approximation) $y = 1.741$, & $y = 0.047$. Le point N de la plus grande ordonnée appartiendra à la branche an , & le point m de la plus petite ordonnée Pm , appartiendra à la branche amb , & parce que entre a & b les deux valeurs de y sont toujours positives, les deux branches am , an sont situées au-dessus de l'axe. Mais en supposant $x > 1$, on trouve pour y deux valeurs, l'une positive & l'autre négative; de sorte que la branche an reste toujours au-dessus de l'axe & la branche amb descend au-dessous du même axe. Si l'on calcule les valeurs de y en décimales, on trouvera autant de points de la courbe que l'on voudra; & cela d'autant plus exactement qu'on poussera l'approximation plus loin. Si on suppose $x = \infty$, on a $y = \infty^{\frac{1}{2}} \pm \infty^{\frac{1}{4}} = \pm \infty^{\frac{1}{4}}$ (parce que le premier terme dispa­roît devant le second); donc les deux branches s'éloignent infiniment de l'axe des abscisses, l'une en dessus, l'autre en dessous. On peut remarquer en passant que les deux branches en partant du point a tournent leur concavité du même côté, de sorte que la convexité de l'une est tournée du côté de la concavité de l'autre.

Si on avoit l'équation $x^4 - x + y + y^3 = 0$, on supposeroit successivement $x = 1, 2, 3, \&c. -1, -2, \&c.$ & l'on résoudroit l'équation du troisième degré qui résulteroit de ces suppositions. Les racines feroient connoître les valeurs correspondantes de y . Si l'on ne pouvoit résoudre l'équation que

par approximation, on n'auroit que des valeurs approchées de y^* .

3. PROBLÈME. *Étant données plusieurs quantités qui dérivent d'un égal nombre d'autres quantités, trouver la loi (du moins approchée) que suivent ces quantités.* Par exemple, étant données les quantités a, b, h, c, fg (fig. 3.) qui dérivent des quantités da, dc, df par une loi inconnue, trouver cette loi (du moins par approximation). Regardant les quantités b, a, ch , &c. comme les ordonnées & les quantités da, dc , &c. comme les abscisses d'une courbe qui passeroit par les points b, h, g , on supposera $y = a + bx + cx^2$, en prenant autant de termes que l'on a de points donnés. Les quantités a, b, c sont constantes, mais indéterminées. Pour les déterminer on supposera que x étant $= da$, y est $= ba$, ce qui donnera une équation dans laquelle on aura trois inconnues a, b & c . Supposant en second lieu qu'ayant $x = dc$, l'on a $y = ch$, on aura une nouvelle équation, dans laquelle il y aura les mêmes inconnues a, b, c . Enfin en supposant que x valant df , y est $= fg$, on parviendra à une troisième équation qui aura la même condition. L'on aura donc trois équations & trois inconnues a, b, c ; donc on pourra aisément trouver les valeurs de ces trois inconnues. Substituant ces valeurs dans l'équation $y = a + bx + cx^2$, on aura la loi cherchée $y = d + b'x + c'x^2$ (d, b', c' désignent les valeurs de a, b, c , données par les équations dont nous venons de parler). Maintenant pour connoître la quantité pm qui répond à la quantité dp , à la place de x on substituera la valeur connue de dp dans la formule que nous venons de trouver, & pm ou y deviendra connue. Cette méthode s'appelle *la méthode des interpolations*, qui est d'un grand usage dans l'Astronomie. Supposons, par exemple, qu'on ait trouvé $d = \frac{1}{4}$, $b' = 1$, & $c' = \frac{1}{8}$; & qu'on demande la valeur de $y = pm$, en supposant $x = 1 + \frac{1}{2}$, on aura $y = \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} =$

* Si l'angle des coordonnées étoit donné de 30° , par exemple, on meneroit les ordonnées parallèles entr'elles & faisant avec l'axe des x un angle de 30° .

$3 + \frac{1}{n}$. Mais si l'on avoit $y = d = ns$ pour avoir $x = dn$, on résoudroit l'équation $c'x^2 + b'x + d = d$.

Du changement des Coordonnées x & y .

4. Soit une courbe $c b m$ (fig. 4.) dans laquelle le point a soit supposé l'origine, & ap l'axe des x , enforte que $ap = x$. Si on veut changer cette origine de manière qu'on veuille compter les abscisses depuis le point d sur le même axe, l'ordonnée $ab = y$ restera évidemment la même qu'au paravant. Supposons la nouvelle abscisse $dp = t$, & $ad = f$. Dans ce cas on aura $ap = x = t - f$. C'est pourquoi si dans l'équation de la courbe on substitue à la place de x & de ses puissances $t - f$ & ses puissances, on aura une équation entre t & y qui représentera la même courbe, avec cette différence que l'origine des abscisses sera en d , au lieu qu'elle se trouvoit ci-devant en a . Si le point d étoit situé en D à la droite du point a , f deviendrait négative, & l'on auroit $x = t + f$. L'abscisse Dp seroit négative lorsque le point p tomberoit à la gauche du point D , & positive dans le cas contraire. Supposons maintenant qu'ayant tiré la ligne sq parallèle à l'axe ap , on veuille prendre le point g de cette ligne pour l'origine des abscisses. Appellant les nouvelles abscisses $gq (r)$, & les ordonnées $mq (u)$, si on suppose $ha = gn = f$, $hg = pq = g$, on aura $gq = gn + nq = ha + ap = f + x = t$, & $x = t - f$, $mp = mq - pq = u - g = y$ (si la ligne sq étoit située

* Nous entendons ici par axe des abscisses la ligne sur laquelle on prend les abscisses, soit que les ordonnées soient perpendiculaires ou obliques à cette ligne.

au-dessus de da , l'on auroit $y = u + g$; c'est pourquoi si dans l'équation à la courbe, à la place de x on substitue $t - f$, & $u - g$ au lieu de y , on aura une équation entre u & t qui représentera la même courbe; mais dont l'axe des abscisses sera sq , & l'origine des abscisses le point g .

5. PROBLÈME. *Etant donnée l'équation à une courbe Am, dont les coordonnées x, y sont perpendiculaires l'une à l'autre, trouver une équation qui exprime cette même courbe rapportée à un axe Rt oblique au premier (fig. 5.), en supposant les ordonnées mt obliques ou perpendiculaires à cet axe. Soit supposé le point d , la nouvelle origine des abscisses, l'angle Rtm des nouvelles coordonnées $= h$; son sinus $= p$, & son cosinus $= q$. Du point d tirant dg parallèle à $m po$, nous ferons $ag = f$, $dg = g = po$. Ayant mené do parallèle au premier axe, soit $= m$ le sinus de l'angle odt , son cosinus $= n$. Menons mq perpendiculaire sur dt , & faisons $dq = t$ & $qm = u$. Faisons de plus les coordonnées obliques $dt = r$, $tm = s$. Tirons enfin les lignes oP , oQ perpendiculaires, l'une sur mq , l'autre sur dt . Cela posé, le triangle rectangle mqt donne le rayon R (que nous supposerons $= 1$, à quoi l'on doit faire attention) : $\cos. mtq(q) :: mt(s) : qt = \frac{sq}{R} = \frac{sq}{1} = sq$; donc $dq = t = dt - qt = r - sq$. Le même triangle donne sinus total (1) : $\sin. mtq(p) :: s : u = ps$. De plus le triangle rectangle moQ donne $1 : y + g :: n : mQ = ny + ng$.*

* A cause de $mo = mp + po = y + g$, & de l'angle $poQ = qid$. En effet les triangles rectangles imo , idq

Le même triangle donne $1 : y + g :: \sin. Qmo$ ou $\sin. i d q (m) : Qo = qP = y.m + g.m$. Le triangle rectangle $o d P$ donne $1 : m :: d o = g a + a p = f + x : o P = m f + m x$. Le même triangle donne $1 : n :: d o (f + x) : d P = n.x + n.f$; donc $d q = t = d P - q P = n f + n x - g m - y m$, $q m = u = m Q + q Q = m Q + o P = m f + m x + n g + n y$. Lorsque l'angle $d t m$ devra être droit, on aura $p = 1$ & $q = 0$.

De ces équations on peut tirer facilement les valeurs de x & y . En effet laissant x seul dans un membre sans le délivrer de son coefficient, la première équation donne $n x = t + m y + g m - n f$, la seconde donne $m x = u - m f - n y - n g$. Faisant $= a$ dans la première & $= b$ dans la seconde, toutes les quantités du second membre qui ne sont pas affectées de y , on a les deux équations $n x = m y + a$. Multipliant la première $m x = -n y + b$. Multipliant la première par m & la seconde par n on aura ces deux autres équations $m n x = m m y + m a$. Otant la seconde $m n x = -n n y + n b$. Otant la seconde de la première, réduisant & transposant, il vient $(m^2 + n^2) \times y = n b - m a$, & divisant par $m^2 + n^2 = 1^*$, l'on trouve $y = n b - m a = n u - m t - g$.

ont leurs angles en i opposés au sommet, & par conséquent égaux, ils ont de plus chacun un angle droit; donc l'angle d de l'un est égal à l'angle m de l'autre; donc les triangles rectangles $d i q$, $m o Q$ ayant leurs angles en d & m égaux; ont les angles $m o Q$, $d i q$ égaux; donc $m o Q$ est complément de $q d o$.

* Parce que dans un triangle rectangle dont l'hypothénuse $= 1$, le sinus d'un des angles aigus $= m$, le sinus de l'autre angle étant $= n$, l'on a $m^2 + n^2 = 1$.

(en se souvenant que $m^2 + n^2 = 1$). Substituant cette valeur de y dans la première équation, on en déduira facilement $x = +mu + nt - f$. On vient de voir que $u = ps$, & $t = r - sq$. Substituant donc ces valeurs au lieu de u & de t , la courbe sera rapportée aux coordonnées s & r . Si l'angle $d\epsilon m$ est droit, on aura $q = 0$, $p = 1$, $u = s$ & $t = r$. Ces déterminations peuvent s'appliquer à tout axe dP situé dans le plan de la courbe & faisant un angle quelconque avec le premier axe. De plus il est évident qu'en substituant à la place de x & y les valeurs que nous venons de trouver, dans la nouvelle équation à la courbe les t & les u , ou les r & les s ne monteront qu'au même degré que les x & les y , ou leurs produits, & que le degré de l'équation & par conséquent l'ordre de la courbe ne changera pas par cette substitution *.

Si on a une courbe mm (fig. 6.) dont l'axe des abscisses soit ap , l'origine des x en a hors de la courbe, ou en a' sur la courbe, ou en A dans la courbe, si on change les x en y , les dm , qm ou ap , $a'p$, Ap deviendront y , & les pm deviendront ad , $a'q$, Ad , ou x & la ligne nad , ou $na'q$, ou nAd deviendra l'axe des abscisses; or cette substitution ne changera pas le degré de l'équation, ni par conséquent l'ordre de la courbe. On appelle *axe des ordonnées* une ligne droite pa-

puisque le carré de l'hypothénuse est égal à la somme des carrés des deux côtés qui comprennent l'angle droit.

* Si la courbe étoit rapportée aux coordonnées obliques r & s , on pourroit la rapporter aux coordonnées perpendiculaires t & u en faisant $s = \frac{u}{p}$ & $r = t \pm sq$, le signe $+$ auroit lieu si l'angle $d\epsilon m$ étoit aigu & le signe $-$ s'il étoit obtus.

rallele aux ordonnées & qui passe par l'origine des abscisses; & il est visible, par ce que nous venons de dire, qu'on peut changer l'axe des x en celui des y , & réciproquement sans changer l'ordre de la courbe.

Supposons maintenant que l'angle HAb (fait par l'axe Ab des x & l'axe AH des y) est oblique ou droit, comme on voudra, & qu'on veuille rapporter la courbe aux nouveaux axes AB , Ah (fig. 6. A) qui font entr'eux un angle quelconque. Je prends $Ah = 1$ (1 signifie l'unité de ligne) = Ab & je mene hC parallele à Ab , hH parallele à AB , bB parallele à AH ; & supposons que l'on ait $Ab : bB :: 1 : p$, & $Ab : AB :: 1 : q$. Les triangles HhC , ABb , ayant leurs côtés paralleles, sont semblables & donnent $AB : Ab :: Hh : Ch$ & $AB : Bb :: Hh : CH$. Si donc on fait $Hh = t$,

$AH = s$, on aura $q : 1 :: t : Ch = \frac{t}{q}$. Mais $1 :$

$p :: Ab : bB :: Ch : CH$; donc $CH = \frac{p t}{q}$; & AC

$= s - \frac{p t}{q}$. Maintenant puisque $FE = Ad$ étant x

par rapport à l'axe Ab , & $dE = AF$ étant y , si l'on fait Ee (parallele à Ah) = $Af = u$ & $fE = Ae = z$, les triangles semblables ACH , AFf donneront $1 : s - \frac{p t}{q} :: u : AF = y = su - \frac{p t u}{q}$.

On aura aussi $Ah : Ch :: Af : Ff$, ou $1 : \frac{t}{q} :: u :$

$Ff = \frac{t u}{q}$. Donc $x = FE = Ff + Ae = \frac{t u}{q} + z$.

Substituant ces valeurs de y & de x dans l'équation de la courbe, elle sera rapportée aux coordonnées u & z , & aux axes AB & Ah . Si l'on vou-

H }

loit seulement changer l'axe Ab des x pour rapporter la courbe aux axes AH & AB , l'on feroit $AB = 1$, $bB = a$, $Ab = b$, & les triangles semblables ABb , Adg donneroient $1 : a :: Ag$ (que je fais $= z$) : $dg = pz$; donc $Eg = Ed + dg = y + az = u$, & $y = u - az$ (si la ligne AB étoit située au-dessus de Ab , on auroit $y = u + az$). Si l'on fait maintenant $1 : b :: AB : Ab :: Ag : Ad = x = bz$; & qu'on substitue dans l'équation de la courbe les valeurs de y & de x que nous venons de trouver, elle sera rapportée aux axes AH & AB . Si l'origine des abscisses a passé de a en d (fig. 5.) & que l'angle des coordonnées ait varié, on pourra se contenter d'écrire $z + \frac{zu}{q} - f, su - \frac{pzu}{q} - g$ au lieu de x & de y .

6. Cherchons maintenant quelles sont les lignes géométriques du premier ordre, désignées par une équation quelconque du premier degré composée de x , y & constantes. Soit l'équation générale du premier degré $ny = ma + mx$, ou $y = \frac{ma + mx}{n}$, ma représente toutes les quantités

constantes, & m le coefficient de x qui peut être positif ou négatif. Sur la ligne mn (fig. 7.) qu'on prendra pour l'axe des abscisses, qu'on supposera positives du côté de n & négatives du côté de m , ou réciproquement, en supposant les quantités n , m , a positives; prenons le point a pour l'origine des abscisses & faisons $Ca = q$. Si l'on fait ar quatrième proportionnelle aux lignes données n , m , a , élevant ar perpendiculairement à la ligne mn , par le point C & le point r on mènera la ligne droite Bd qui répondra à l'équation proposée. En effet

supposant $au = x$, l'ordonnée uq (parallèle à ra) $= y$, on aura $Cu = Ca + au = a + x$, & à cause des triangles semblables Car , Cuq on aura $Ca(a) : ar\left(\frac{ma}{n}\right) :: Cu(a+x) : uq$
 $= y = \frac{ma + mx}{n}$. Si on suppose $a = 0$, on aura

$$ar = \frac{ma}{n} = 0, \text{ \& l'équation deviendra } y = \frac{mx}{n}.$$

Faisant $Cf = n$, $fg = m$ & menant par g & C la ligne dB , on aura la ligne cherchée, en supposant l'origine des x en C . En effet les triangles semblables Cuq , Cfg donneront $Cf(n) : fg(m) :: Cu(x) : uq = y = \frac{mx}{n}$. Si a étoit négative l'équation seroit $y =$

$$\frac{mx - ma}{n}. \text{ Prenant } CA = -a, \text{ le point } A \text{ pour}$$

l'origine des abscisses, & $AR = -\frac{ma}{n}$ (AR est située du côté des y négatifs), les points R & C détermineront la position de la ligne Bd . En effet les triangles semblables CAR , Cuq donnent $CA(-a) : AR\left(-\frac{ma}{n}\right) :: Cu = Au - CA = x - a :$

$$uq = y = \frac{mx - ma}{n}. \text{ Si supposant } m, n, a \text{ po-}$$

sitifs, x étoit négatif, on auroit $y = \frac{ma - mx}{n}$,

quantité positive lorsque $x < a$: or les triangles Cfg , Cra donnent $Ca(a) : ar\left(\frac{ma}{n}\right) :: Cf$

$$(a - x) : gf = y = \frac{ma - mx}{n}. \text{ Si dans cette}$$

même supposition on suppose $x = a$, l'on aura $y = 0$, ce qui d'ailleurs est évident, puisque y devient 0 en C, où l'on a $aC(-x) = Ca = a$. Si dans cette même supposition $x > a$, y sera négatif : car les triangles VQC , $Cr a$ donnent $a : \frac{ma}{n} :: CV(-x + a) : VQ = y = \frac{-mx + ma}{n}$, quantité négative dans ce cas.

Si m & n sont toutes deux négatives, la valeur de y ne changera pas, parce que l'une se trouvant au numérateur, l'autre se trouve au dénominateur. Mais si l'une des deux seulement étoit négative, la position de la ligne Bd en seroit changée, de sorte que qu deviendrait uh , les ordonnées positives deviendroient négatives & réciproquement.

Si l'une des inconnues x , par exemple, manquoit dans l'équation, l'on auroit $y = \frac{ma}{n}$, quantité constante. Dans ce cas la ligne demandée seroit parallèle à la ligne des abscisses. En effet, en supposant $mo = \frac{ma}{n}$, il est évident que toutes les ordonnées ma , nB terminées à la ligne oB parallèle à l'axe mn , sont égales à $\frac{ma}{n}$. Si dans ce cas on fait $a = 0$, y sera $= 0$, c'est-à-dire que oB se confondra avec mn . Si l'inconnue y manque dans l'équation de manière que l'on ait une équation de cette forme $x = \frac{ma}{n}$, il est visible qu'en comptant les abscisses depuis le point C & faisant $Cn = \frac{ma}{n}$, on aura $Cn = pB = x = \frac{ma}{n}$, ainsi la ligne cherchée seroit une ligne Bn pa-

rallele à l'axe des ordonnées pC (on suppose l'origine des x en C), & si on supposoit $a = 0$, on auroit $x = 0$. Donc cette ligne Bn se confondroit avec Cp axe des ordonnées.

7. COROLLAIRE. De ce que nous venons de dire, il suit évidemment que toute équation du premier degré à une ou deux inconnues représente une ligne droite & non une ligne courbe; ainsi les lignes du premier ordre se réduisent toutes à la ligne droite.

De quelques propriétés des lignes de tous les ordres.

8. Il est visible par les premières notions de la Géométrie, que deux lignes droites différentes ne peuvent avoir deux points communs; donc une ligne du premier ordre ne peut être coupée qu'en un seul point par une ligne droite. Je dis aussi qu'une ligne du second ordre ne peut être coupée qu'en deux points, une ligne du troisième ordre qu'en trois points; & qu'en général une ligne de l'ordre n ne peut être coupée qu'en un nombre n de points par une ligne droite quelconque. En effet, soit l'équation générale des lignes du second ordre $y^2 + y.(lx + n) + mx^2 + px + q = 0$. (Nous n'avons point donné de coefficient à y^2 , parce qu'on peut toujours délivrer le premier terme d'une équation de son coefficient, comme nous l'avons vu dans le Calcul). Il est visible qu'on trouvera les points où la ligne des abscisses coupe la courbe, en faisant $y = 0$ (parce que dans ces points y est $= 0$), ce qui donnera $mx^2 + px + q = 0$. Mais cette équation étant du second degré ne peut avoir que deux racines; donc la ligne des abscisses ne peut rencontrer la courbe qu'en deux points, & si la supposition de $y = 0$,

rend les valeurs de x imaginaires, la courbe ne peut être rencontrée par la ligne des abscisses, ce qui peut arriver lorsqu'ayant changé la position de l'axe des abscisses (n° 4 & 5.), le nouvel axe se trouve tout-à-fait hors de la courbe. Si l'on fait $x = 0$ en prenant l'axe des x pour celui des y & réciproquement, on trouvera $y^2 + ny + q = 0$, équation qui, comme la précédente, ne peut avoir que deux racines; donc l'axe des ordonnées ne peut couper une ligne du second ordre qu'en deux points. De plus, parce que l'on peut prendre (5.) telle ligne que l'on voudra pour l'axe des abscisses, l'équation de la courbe restant toujours du même degré, il est visible qu'une ligne du second ordre ne peut être coupée qu'en deux points par une ligne droite quelconque. Mais elle peut être coupée en un seul point, comme il arrive à la parabole qui est coupée en un seul point par son axe. En général en supposant $y = 0$ dans une ligne de l'ordre n , représentée par l'équation $y^n + pxy^{n-1} + q x^n + lx^{n-1} + d = 0$, on aura $q x^n + h x^{n-1} + d = 0$, équation du degré n , qui ne peut avoir que n racines: donc cette courbe ne peut être coupée par la ligne des abscisses, ni par aucune autre ligne en un nombre de points plus grand que n . Il peut se faire qu'elle soit coupée en un nombre moindre de points, si quelques-unes des racines de cette équation sont imaginaires, ou même en aucun si toutes les racines de l'équation dont on vient de parler sont imaginaires.

9. THÉORÈME GÉNÉRAL. *Une droite quelconque ne peut rencontrer une ligne d'un ordre n , qu'en un nombre n de points.*

10. PROBLÈME. *Déterminer la position d'une*

ligne d'un ordre quelconque n . Soit l'équation des lignes du premier ordre $y = \frac{m a}{a} + \frac{m x}{n} = b + c x$

en faisant $\frac{m a}{n} = b$ & $\frac{m}{n} = c$. Il est visible, par ce

que nous avons déjà dit, que la position d'une ligne droite Bd (fig. 7.) ne dépend que de la détermination de b & de c , ou du rapport du coefficient de x & de la quantité constante $a m$ qui entre dans l'équation au coefficient de y ; donc une ligne droite n'admet que deux déterminations, ou, ce qui revient au même, la position d'une ligne droite ne dépend que de deux points; ce qu'on sait d'ailleurs. La position d'une ligne du second ordre ne dépend que de cinq points. En effet, prenant l'équation générale du second degré, qui peut représenter toutes les lignes du second ordre, $0 = a + b x + c x^2 + d y + f x y + y^2$. Ayant pris $a p$ (fig. 8.) pour l'axe, & le point a pour l'origine des x , si on suppose $y = 0$, on aura $x = 0$: car rien n'empêche de supposer l'origine des abscisses sur un point de la courbe; or alors à $y = 0$ répond $x = 0$; donc $a = 0$. Faisant ensuite successivement $y = p B$, $x = a p$; $y = p' c$, $x = a p'$, $y = d p''$, $x = a p''$, $y = p''' f$, $x = a p'''$, on aura encore quatre nouvelles équations, au moyen desquelles on pourra déterminer les constantes b , c , d , f . D'ailleurs on a trouvé $a = 0$; donc une ligne du second ordre admet seulement cinq déterminations, & sa position ne peut dépendre que de cinq points; & parce qu'une ligne quelconque du troisième ordre peut être représentée par une équation à dix termes, ainsi qu'il est aisé de s'en convaincre en prenant une équation générale du

troisième degré, que parmi ces dix termes il y en a un de constant, & qu'on peut supposer le terme où se trouve y^3 sans coefficient; on trouvera par la même méthode qu'une ligne du troisième ordre admet neuf déterminations; c'est-à-dire, est déterminée par neuf points, & en général une ligne d'un ordre n admet seulement $\frac{n \cdot (n+3)}{2}$ déterminations, de sorte que si le nombre des points par lesquels on veut faire passer une ligne de l'ordre n , est moindre que $\frac{n \cdot (n+3)}{2}$, on pourra faire passer par ces points une infinité de lignes du même ordre.

REMARQUE I. On fait par les Éléments de Géométrie que la position d'un cercle ne dépend que de trois points, & que deux cercles différents ne peuvent avoir trois points communs; donc quoiqu'en général on puisse faire passer une infinité de lignes du second ordre par trois points donnés, cela ne doit point s'entendre de toutes les espèces de lignes de cet ordre.

REMARQUE II. Avant de passer plus loin, nous ferons remarquer que pour qu'une ligne appartienne à un ordre n , il est nécessaire que l'équation du degré n , qui représente cette ligne, ne puisse pas être résolue en facteurs rationnels; c'est-à-dire, que cette équation ne doit pas avoir de diviseurs commensurables, autrement elle seroit composée d'autres équations d'un degré inférieur; qui représenteroient des lignes d'un ordre inférieur. Ainsi l'équation $y^2 - ay - xy + ax = 0$, ou $(y-x) \times (y-a) = 0$, est composée de deux équations qui sont toutes les deux à une ligne

droite. En effet si l'on suppose que l'angle BCn (fig. 7.) est demi-droit, on aura toujours $Cu = x = uq = y$; donc l'équation $y - x = 0$ est à la ligne droite. L'équation $y - a = 0$, ou $y = a$ est aussi à la ligne droite : car supposant po parallèle à mn , & $Cp = a$, on aura toujours $Cp = mo = Bn = y = a$. On peut voir aussi qu'en multipliant une équation qui représente une ligne de l'ordre n par une autre équation qui représente une ligne de l'ordre m , on auroit une ligne de l'ordre $m + n$ en apparence, qui ne seroit pas cependant de cet ordre; ainsi une équation du cinquième degré pourroit paroître représenter une ligne du cinquième ordre, quoiqu'elle ne représentât que deux lignes, l'une du second, l'autre du troisième ordre *.

Des Lignes du second ordre.

11. Nous avons dit ci-dessus (7.) qu'une équation générale du premier degré à deux inconnues, ne représentoit qu'une ligne droite. Voyons maintenant quelles lignes représente l'équation générale du second degré $y^2 + lxy + mx^2 + q = 0$, dans

$$+ ny + px$$

laquelle sont contenues toutes les lignes du second ordre, si on en excepte celles dans l'équation desquelles ne se trouve pas le carré de y , & desquelles nous parlerons dans la suite. Soit cpd (fig. 9.) une courbe quelconque exprimée par notre équation, dans laquelle aB , soit $= x$ & $Bc = y$, il est

* On appelle ces sortes de lignes, *lignes complexes*. Celles au contraire dont l'équation n'est pas résoluble en facteurs rationnels, s'appellent *lignes continues*, *lignes incomplexes*.

facile de voir qu'il est nécessaire que y ait deux valeurs (à cause du carré y^2 qui se trouve dans l'équation) représentées par Bc & Bd . Cela posé faisons $y = u - \left(\frac{lx + n}{2}\right)^*$, ou $y + \frac{lx + n}{2} = u$.

Prenant les carrés des deux membres & transposant, on trouve $y^2 + lxy = u^2 - \frac{l^2 x^2}{4} -$
 $+ ny$

$\frac{lnx}{2} - \frac{n^2}{4}$. Substituant cette valeur de $y^2 + lxy + ny$.

dans l'équation générale ci-dessus, elle sera changée en celle-ci $u^2 - \frac{l^2 x^2}{4} - \frac{lnx}{2} + q = 0$.

$$+ mx^2 + px - \frac{n^2}{4}$$

Voyons maintenant ce qui arrive de nouveau dans la figure par ce changement de forme. Pour avoir la valeur de u , il faut ajouter premièrement à la ligne $Bc = y$, la quantité $\frac{n}{2}$. Cela se fera en

prenant fa parallèle à dc , & $= \frac{n}{2}$, & tirant fg

paralèlement à aB : car par-là cg sera $= y + \frac{n}{2}$,

$fg = aB$, étant x . Il faut ensuite ajouter à cg , que nous venons de trouver, la quantité $\frac{lx}{2}$, ce

* $\frac{lx + n}{2}$ est la moitié du coefficient du second terme,

en supposant l'équation ordonnée par rapport à l'inconnue y , & considérant x comme connue. Voyez dans l'Algebre comment il faut s'y prendre pour délivrer une équation de son second terme.

que nous ferons en cette manière. Faisons $fi : ik :: 2 : l$ *. Menant ik parallèle à dc , par les deux points f, k on tirera fkh & l'on aura $gh = \frac{l \cdot x}{2}$. En effet les triangles semblables fki, fgh donnent $fi : ik :: fg : gh :: 2 : l$; donc $gh = \frac{l \times fg}{2} = \frac{l \cdot x}{2}$; donc $ch = y + \frac{l \cdot x}{2} + \frac{n}{2} = u$, en supposant toujours $fg = x$.

Mais parce que l'équation est entre u & x qui ne sont pas coordonnées, puisque u ou ch n'est pas terminée par fg , nous chercherons l'équation entre $u = ch$, & la ligne $fh = z$, à laquelle les u se terminent. Supposons la raison de fi à fk qui est connue par la construction, ** = $2 : k$; donc

on aura $x : z :: 2 : k$, & $x = \frac{2z}{k}$. Cette valeur de x , étant substituée dans la formule; donnera

$$u^2 - \frac{l^2 z^2}{k^2} - \frac{l n z}{k} - \frac{n^2}{4} = 0. \text{ Il est évident qu'en}$$

$$+ \frac{4mz^2}{k^2} + \frac{2pz}{k} + q$$

opérant ainsi nous n'avons fait que transporter la ligne des abscisses de aB en fh ; donc l'équation

* Si, par exemple, $l = 4$, on aura $fi : ik :: 2 : 4 :: 1 : 2$. On prendra donc dans ce cas $ki = 2 \cdot fi$. Si $l = 1$, on aura $fi = ki$, &c.

** Puisque le rapport de $fi : ik = 2 : l$, connoissant fi on connoitra ik ; donc dans le triangle fik on connoitra deux côtés & l'angle i compris entre ces côtés: car la position de fg & de ki est connue; ainsi l'on connoitra l'autre côté fk .

que nous venons de trouver ne renferme pas moins les lignes du second ordre *.

Cette équation fait voir que u a deux valeurs égales, l'une positive, l'autre négative; donc $dh = ch$; donc toutes les lignes parallèles à la ligne dc sont coupées par fh en deux également; donc fh est un diamètre** & dc une double ordonnée à ce diamètre.

12. On doit faire une grande attention au coefficient du second terme de l'équation que nous venons de trouver : car c'est de ce coefficient que dépend la diversité des lignes du second ordre. Ce coefficient est $\frac{4m}{k^2} - \frac{l^2}{k^2}$. Maintenant il peut arriver trois cas : 1^o que $4m = l^2$. Dans ce cas ce coefficient est $= 0$, & le second terme s'évanouit.

2^o Il peut se faire que $m > \frac{l^2}{4}$, alors le second terme est positif, il sera au contraire négatif si $m < \frac{l^2}{4}$. Cela posé changeant u en y & z en x , les trois cas dont nous venons de parler seront représentés par les équations

$$y^2 - bx - c = 0, \text{ en supposant } 4m = l^2$$

$$y^2 + ax^2 - bx - c = 0, \text{ en suppos. } \frac{4m}{k^2} - \frac{l^2}{k^2} = a, \text{ quantité positive.}$$

$$y^2 - ax^2 - bx - c = 0, \text{ en suppos. } \frac{4m}{k^2} - \frac{l^2}{k^2} = -a, \text{ quantité négative.}$$

* Il faut en excepter les lignes dans l'équation desquelles le carré y^2 manque, ainsi que nous l'avons dit ci-dessus.

** Nous entendons ici par diamètre une ligne qui partage ses doubles ordonnées en deux également, quelque soit l'angle des coordonnées.

Il est aisé de voir qu'on a supposé $-\frac{ln}{k} + \frac{2p}{k}$

$= -b$, & $-\frac{n^2}{4} + q = -c$. Dans la première

formule si x augmente à l'infini, & qu'on suppose b & x tous deux positifs ou tous deux négatifs, il est sûr que y aura deux valeurs réelles & égales entr'elles, l'une positive, l'autre négative. Mais si l'un des deux étant positif, l'autre est négatif, les valeurs de y seront imaginaires, du moins en supposant $x = \infty$; donc la courbe ne peut avoir que deux branches infinies d'un seul côté. Il n'est pas difficile de voir que si l'on avoit une équation de cette forme $x^2 - by - c = 0$, en changeant x en y & réciproquement, il en résulteroit une équation de la forme, $y^2 - bx - c = 0$, qui donne la première formule.

Si dans la seconde équation l'on suppose x positif ou négatif infini, les valeurs de y seront imaginaires; donc la courbe n'aura point de branches infinies. Enfin dans la troisième équation si x positif ou négatif devient infini, y aura toujours deux valeurs réelles, c'est pourquoi la courbe aura quatre branches infinies, deux du côté des x positifs & deux du côté des x négatifs; donc il y a trois especes de lignes du second ordre, la première espece s'appelle *Parabole*, la seconde *Ellipse* (dans laquelle on comprend le cercle); la troisième comprend les *hyperboles opposées*.

Revenons un moment à la formule générale. Nous venons de voir que la courbe étoit une parabole, lorsque $4m = l^2$, ou $m = \frac{l^2}{4}$. Mais dans cette hypothèse la somme de tous les termes dans

lesquels la somme des exposants des indéterminées x & y est $= 2$, est un carré parfait $y^2 + lxy + mx^2 = y^2 + lxy + \frac{l^2}{4}x^2$; donc cette somme peut se résoudre en deux facteurs égaux; donc toutes les fois que $y^2 + lxy + mx^2$ pourra se résoudre en deux facteurs égaux, l'équation sera à la parabole. Mais si $m = \frac{l^2}{4}$ est une quantité positive (ce qui donne une Ellipse), $y^2 + lxy + mx^2$ ne pourra pas se résoudre en deux facteurs réels; donc lorsque cette dernière formule ne peut pas se résoudre en deux facteurs réels, la courbe est une Ellipse. Enfin $y^2 + lxy + mx^2$ se résout en facteurs réels *, si $m = \frac{l^2}{4}$ est une quantité négative, c'est le cas de l'Hyperbole; donc la courbe sera une Hyperbole toutes les fois que cette formule sera résoluble en facteurs réels inégaux. On peut donc reconnoître facilement dans les différents cas ces trois espèces de courbes. Venons à la Parabole.

13. La formule générale de la Parabole est celle-ci, $y^2 = bx + c = b \times \left(x + \frac{c}{b}\right)$. Faisant $x + \frac{c}{b} = z$ (ce qui ne fait autre chose que changer l'origine des abscisses), on aura $y^2 = bz$, ou changeant z en x , $y^2 = bx$, ou en faisant $b = p$, $y^2 = px$, équation à la Parabole, ainsi que nous l'avons vu dans les Sections Coniques. Si b étoit négatif, l'équation seroit $y^2 = -bx$. C'est-à-dire qu'aux x

* Pour faire cette résolution, on n'a qu'à supposer $y^2 + lxy + mx^2 = 0$, & chercher les racines de cette équation, en regardant y comme l'inconnue.

positifs répondroient des y imaginaires, & des y réels aux x négatifs : car x étant négatif on aura $y^2 = -b \times -x = bx$, & $y = \pm \sqrt{bx}$.

14. Passons à la formule de l'Ellipse $y^2 + ax^2 - bx - c = 0$, ou $\frac{y^2}{a} + x^2 - \frac{bx}{a} - \frac{c}{a} = 0$, ou $\frac{y^2}{a} + x^2 - \frac{bx}{a} - \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} = 0$. Si on transfère l'origine des abscisses en faisant $x - \frac{b}{2a} = z$, on aura $x^2 - \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = z^2$. Substituant z^2 à la place de sa valeur dans la dernière formule, on trouve cette équation plus simple $\frac{y^2}{a} + z^2 - \frac{b^2}{4a^2} = 0$, ou $\frac{y^2}{a} = \frac{b^2}{4a^2} - z^2$. Il est visi-

$$- \frac{c}{a} + \frac{c}{a}$$

ble que y sera imaginaire (il en est de même de la courbe) toutes les fois que $\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}$ est une quantité négative ; c'est-à-dire, que dans ce cas l'équation ne représente aucune courbe possible. Pour donner une forme plus commode à l'équation, supposons $g^2 = \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}$ & $\frac{g^2}{f^2} = \frac{1}{a}$. Substituant ces valeurs & changeant z en x , on aura $\frac{g^2}{f^2} y^2 = g^2 - x^2$, ou $y^2 = \frac{f^2}{g^2} (g^2 - x^2)$, équation à une Ellipse dont les demi-diamètres seroient

* On ne fait qu'ajouter & retrancher $\frac{b^2}{4a^2}$, ce qui peut évidemment se faire.

f & g . Si on fait $f = g$, il vient $y^2 = g^2 - x^2$, équation au cercle lorsque l'angle des coordonnées est droit, & aux diamètres conjugués égaux de l'Ellipse dans le cas contraire.

15. Examinons enfin la dernière formule $y^2 - ax^2 - bx - c = 0$ (qui appartient à l'Hyperbole). Divisant par a , ajoutant & retranchant en même temps $\frac{b^2}{4a^2}$, nous aurons $\frac{y^2}{a} - x^2 - \frac{bx}{a} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = 0$. Faisant $x + \frac{b}{2a} = z$, l'on aura $z^2 = x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$, substituant $-z^2$ à la place de $-x^2 - \frac{bx}{a} - \frac{b^2}{4a^2}$, il vient $\frac{y^2}{a} - z^2 + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = 0$. Maintenant si $\frac{b^2}{4a^2} > \frac{c}{a}$, supposant $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = g^2$, $\frac{1}{a} = \frac{g^2}{f^2}$, & changeant z en x on aura l'équation $\frac{g^2}{f^2} y^2 - x^2 + g^2 = 0$, ou transposant & divisant par le coefficient du premier terme, $y^2 = \frac{f^2}{g^2} (x^2 - g^2)$, ou changeant f en b & g en a , $y^2 = \frac{b^2}{a^2} (x^2 - a^2)$, équation à l'Hyperbole.

Revenons à la formule & supposons que $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$ est une quantité négative $= -g^2$, nous aurons $\frac{g^2}{f^2} y^2 = z^2 + g^2$ (en supposant toujours $\frac{1}{a} = \frac{g^2}{f^2}$), ou changeant g en a , f en b , z en x ,

& divisant tout par le coefficient du premier membre, $y^2 = \frac{b^2}{a^2} (x^2 + a^2)$, équation qui appartient encore à l'Hyperbole. Si $a = b$ l'équation sera à l'Hyperbole équilatère.

Supposons enfin $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = 0$, ou $\frac{b^2}{4a^2} = \frac{c}{a}$.

Substituant x à la place de z , & $\frac{b^2}{c^2}$ à la place de $\frac{1}{a}$, on a l'équation $\frac{b^2}{c^2} \times y^2 = x^2$, ou en prenant les

racines, $\frac{b}{c} y = x$, équation à une double ligne droite CB , Cz : car faisant $Ca = b$, $ar = az = c$, les lignes CB (fig. 7.), Ch prolongées à l'infini satisferont à l'équation, les Cu seront les x , les uq , les y positifs, les uh les négatifs. En effet les triangles semblables Car , Cuq donnent $b : c :: x : y$, d'où l'on tire $x = \frac{by}{c}$. Les triangles $Ca z$, $Cu h$ donnent $Ca : az :: Cu : uh$ ou $c : b :: -y : x = -\frac{by}{-c}$ (parce que az est dans une situation opposée à ra) $= \frac{by}{y}$.

16. Voyons maintenant quelle courbe désigne l'équation générale du second degré, lorsque y^2 ne s'y trouve pas. Dans ce cas la formule peut s'exprimer ainsi $xy + mx^2 + px + ny + q = 0$ *. Si on fait $y + mx + p = u$, en substituant

* Il n'y a qu'à supposer que le terme affecté de xy est le premier terme de l'équation, & qu'on a tout divisé par le coefficient de ce terme.

uant u à la place de sa valeur, nous aurons l'équation $xu + ny + q = 0$. Multipliant u & sa valeur par n , ajoutant nu & retranchant le produit de la valeur de u par n , il viendra (A) $xu + nu - mnx - np + q = 0$. Voyons quel changement produit dans la courbe cette substitution. Soit eq (fig. 10.) la courbe de l'équation, $ab = x$, $bc = y$. Pour trouver u il faut ajouter à y la quantité p . Ainsi du point a menant af parallèle à ch & égale à la constante p , & par le point f menant fo parallèle à ba , bg sera $p = af$, $cg = y + p$ & $fg = ab = x$. Il faut encore ajouter mx , c'est-à-dire, une ligne qui soit à x comme m est à l'unité. Soit $fo : ok :: 1 : m$. Supposant ok parallèle aux ordonnées, menez fk . Les triangles semblables $fo k$, $fg h$ donneront $fo : ok :: fg : gh :: 1 : m$; donc $fg \times m$, ou $mx = 1 \times gh = gh$; donc $ch = y + mx + p = u$. Telle est l'équation entre ch & fg . Mais cherchons l'équation entre ch & dh , afin que les ordonnées soient terminées aux abscisses. Pour cela soit $fo : fk :: 1 : k$. Faisant $fh = z$, on aura $fg : fh$, ou $x : z :: 1 : k$ & par conséquent $x = \frac{z}{k}$. Substituant cette valeur de x dans l'équation A, nous trouverons $\frac{z}{k}u + nu - \frac{mnz}{k} - np + q = 0$, ou ôtant la fraction, $zu + nku - mnz - nkp + qk = 0$. Il est aisé de voir que la courbe n'a point changé par cette substitution. Seulement on a transposé l'origine des abscisses de la ligne ab , à la ligne fh .

Mais continuons les substitutions. Soit $z + nk = x$, ou $z = x - nk$, prenant $df = nk$, $dh =$

$df + fh$ sera $= z + nk = x$. Soit de plus $u - mn = y^*$, ou $u = y + mn$, en substituant ces valeurs de z & de u dans la dernière équation à la courbe, il viendra $xy + mn^2k - nkp + qk = 0$. Prenant donc parallèlement aux ordonnées $dm \pm$

$mn = \frac{m \times n}{1}$, & menant mi parallèle à dh , i.e

sera $= y = u - mn$ & $mi = dh = x$, & faisant la somme des quantités constantes $= c^2$, l'on aura $xy + c^2 = 0$, ou $xy = -c^2$. Si c^2 est une quantité négative, l'équation sera $xy = c^2$, équation aux asymptotes d'une Hyperbole, dont la puissance $= c^2$. Si c^2 est une quantité positive, en prenant sn pour la ligne des abscisses, aux abscisses dn positives répondront des y (nN) négatifs, & aux abscisses ds négatives des y (sf) positifs; car $-y \times x$, ou $-x \times y$ donne $-xy = -c^2$. Si $c^2 = 0$, l'équation $xy = 0$, sera à deux lignes droites qui coïncideront l'une avec l'axe sdn des abscisses, l'autre avec l'axe $d m$ des ordonnées; donc lorsque y^2 ne se trouve pas dans l'équation, l'équation appartient à l'Hyperbole rapportée aux asymptotes, ou à deux lignes droites, lorsque $c^2 = 0$. Ainsi dans ce dernier cas l'équation renferme le système de deux lignes droites.

17. Quoique nous ayons déjà traité des lignes du second ordre sous le nom de *Cercle*, d'*Ellipse*, de *Parabole* & d'*Hyperbole*, nous allons néanmoins parler de quelques propriétés générales qu'on tire de leur équation. Revenons donc à l'équation géné-

* Les x & les y dont il est ici question ne sont pas les mêmes que les x & les y de l'équation primitive.

rale $y^2 + y.(lx + n) + mx^2 + px + q = 0$. Cette équation, en regardant y comme l'inconnue, donnera deux valeurs de y , toutes deux réelles ou toutes deux imaginaires (y a une seule valeur toujours réelle, lorsque y^2 manque dans l'équation); or c'est la propriété d'une équation quelconque que la somme de ses racines est égale au coefficient du second terme pris avec un signe contraire; donc la somme des deux valeurs de y sera $= -lx - n$.

Soit une ligne du second ordre fkc (fig. 11). Sur la ligne ao des abscisses dont l'origine soit supposée en a , prenons $aB = x$. A cette abscisse répondront les ordonnées Bd , Bc ; donc $Bd + Bc = -lx - n = -l.aB - n^*$. Ayant pris ensuite une autre abscisse ah , à laquelle répondent les deux ordonnées hf , hg , on aura $hf + hg = -l.ah - n$. Retranchant la seconde équation de la première, on aura $Bd - hf + Bc - hg = -l.aB + l.ah$; c'est-à-dire (en menant fp & gq parallèles à Bo) $pd - qc = -l.hB$, & en changeant les signes, $qc - pd = l.hB$, d'où l'on tire $qc - pd : hB :: l : 1$. Donc la différence de pd à qc est à l'interceptée hB en raison constante de $l : 1$. S'il s'agit des ordonnées $2h2f$, $2h2g$, il est visible qu'on aura les équations $Bd + Bc = -l.aB - n$, $2h2f - 2h2g = -l.a2h - n$ (parce que $2h2g$ est négative); donc ayant mené $2f2p$, $2g2q$ parallèlement à Bo , & retranchant la seconde équation de la première, il viendra $Bd - 2h2f + Bc + 2h2g$, ou $2pd + 2qc = l.B2h$; donc la somme des lignes

* Le point qui se trouve entre l & aB , indique le produit de l par aB .

$2pd$, $2qc$ est à la différence des abscisses en raison constante de $l:1$.

REMARQUE. Les lignes pd & qc , à compter des points p & q , tendent vers la courbe par des directions contraires; mais les lignes $2q'c$, $2p'd$ rencontrent la courbe en allant dans la même direction.

Concevons que la ligne Bcd se meut parallèlement à elle-même jusqu'à ce qu'elle devienne tangente en k , où les points c & d se confondront, les deux racines ou les $2y$ (Bc , Bd) deviendront égales à $k l$. Maintenant supposant menée kr parallèle à la ligne des abscisses, nous aurons par une opération semblable aux précédentes $mc - md : lB = km :: l:1$, c'est-à-dire, en raison donnée. Soit de même une autre droite hgf , parallèle aux ordonnées, on trouvera $ng - nf : kn :: l:1$; donc $mc - md : km :: ng - nf : kn$; donc si $mc - md = 0$, ou si $mc = md$, ng sera $= nf$; donc dans une ligne du second ordre, si une ligne menée par le point de contact k divise en deux également une ligne parallèle à la tangente, elle divisera aussi en deux également toutes les parallèles à la tangente.

13. Par la propriété des équations du second degré le produit des racines est égal au dernier terme de l'équation; donc dans la même hypothèse qu'auparavant on aura $Bc, Bd = mx^2 + px + q^*$. Si dans l'équation générale on fait $y = 0$, nous aurons $mx^2 + px + q = 0$, ou $x^2 + \frac{p}{m}x + \frac{q}{m} = 0$.

* Toutes les quantités délivrées de l'inconnue y sont censées former le dernier terme de l'équation.

Si les racines de cette équation sont réelles, il est nécessaire que la ligne des abscisses coupe la courbe en deux points ; de sorte que ai , ao seront dans ce cas les racines de cette dernière équation * ; donc $x - ai$, $x - ao$ seront les facteurs de l'équation, & leur produit sera $x^2 + \frac{p \cdot x}{m} + \frac{q}{m}$; donc $Bc \cdot Bd = m \cdot (x - ai) \cdot (x - ao)$ **. Mais $x = aB$; donc $Bc \cdot Bd = m \cdot Bi \cdot Bo = m \cdot Bi \cdot Bo$. C'est pourquoi le rectangle $Bc \cdot Bd$ est au rectangle $Bi \cdot Bo$ comme $m : 1$, c'est-à-dire, en raison constante. On peut démontrer de même que $hg \cdot hf : hi \cdot ho :: m : 1$; donc $Bc \cdot Bd : Bi \cdot Bo :: hg \cdot hf : hi \cdot ho$. La même chose a lieu pour toutes les autres lignes parallèles aux ordonnées & qui rencontrent la courbe ; donc on peut établir le Théorème suivant.

19. THÉORÈME GÉNÉRAL. Dans une ligne du second ordre, si deux droites parallèles à des lignes données coupent la courbe en deux points, les rectangles faits des parties interceptées entre le point de concours de deux lignes, & les points de section de la courbe sont en raison constante.

20. COROLLAIRE I. Si les deux points de section se confondent en un, ce qui arrive lorsque la ligne de sécante devient tangente, dans ce cas Bc & Bd étant chacune égale à lk , on aura le carré de lk

* Dans cette équation, x est censé l'inconnue.

** On multiplie par m , parce que $Bc \times Bd = m \times (x^2 + \frac{p \cdot x}{m} + \frac{q}{m}) = m \cdot x^2 + p \cdot x + q$. Mais $(x - ai) \cdot (x - ao) = x^2 + \frac{p \cdot x}{m} + \frac{q}{m}$.

au rectangle de $li.lo$ en raison constante. Si on a un diamètre kr (fig. 13.) rencontrant la courbe en deux points k, r on aura $k.N.Nr : Na.Nb = (Na)^2$ (parce que le diamètre divise ses doubles ordonnées en deux également) : $k.M.Mr : Md.Mc = (Md)^2$; c'est-à-dire, que les produits des abscisses sont toujours comme les carrés des ordonnées. Si le point r est à une distance infinie, ce qui arrive pour les diamètres de la parabole, dans ce cas rN, rM sont censées égales; donc en divisant les antécédents par rN ou rM , l'on aura le rapport des abscisses égal au rapport des carrés des ordonnées correspondantes. Il est aisé de voir ce qui doit arriver dans la figure 11, en supposant que kr est un diamètre.

21. COROLLAIRE II. Si deux droites tirées d'un même a (fig. 12.), sont supposées couper la courbe aux points m, n, i, o , ayant tiré $d.p$ parallèle à na , coupant ao en c , & fg parallèle à oa coupant an en h . Si ao est regardée comme la ligne des abscisses, on aura $ai.ao : am.an :: ci.co : cd.cp$. Si ensuite nous prenons an pour la ligne des abscisses, nous aurons $am.an : ai.ao :: hm.hn : hf.hg$; donc $ci.co : cd.cp :: hf.hg : hm.hn$; donc si l'on a deux lignes qui se coupent en un point h & qui rencontrent la courbe chacune en deux points, ayant tiré deux autres lignes qui leur soient parallèles & qui fassent la même chose, les rectangles faits des parties interceptées entre les points de concours des lignes & les points de section de la courbe seront proportionnels & par conséquent en raison constante.

22. THÉORÈME. Dans une ligne du second ordre ayant mené deux cordes $a.b, c.d$ (fig. 13.) parallèles & tiré les lignes $a.c, b.d$ pour avoir le

trapeze $c d b a$, si dans ce trapeze on mene une ligne $m n$ parallele aux cordes $c d$, $a b$, les interceptées $m p$, $q n$ seront égales. Car si l'on mene le diametre $k r$ qui divise en deux également $a b$ & $c d$, il divisera aussi en deux également la parallele $m n$. Mais par la Géométrie vulgaire, il est évident que ce diametre doit diviser $p q$ en deux également ; donc $m p = q n$.

COROLLAIRE I. Donc $m q = n p$.

COROLLAIRE II. Il suit du Corollaire précédent que si l'on a cinq points de la courbe a , b , d , c , m il sera aisé d'en trouver un sixieme n en menant $m n$ parallele aux lignes $a b$, $c d$, & les lignes $a c$, $b d$ pour prendre ensuite $p n = q m$. Il est visible que cette méthode suppose que les points a , b , c , d sont disposés de façon que les lignes $a b$ & $c d$ sont paralleles, & que le point m est sur un arc de la courbe compris entre ces paralleles.

De quelques propriétés des Lignes du troisieme Ordre.

23. Soit l'équation générale des lignes de cet ordre $y^3 + (b x + c).y^2 + (d x^2 + f x + g).y + h x^3 + l x^2 + m x + n = 0$ *. A moins donc que le premier terme y^3 manque dans l'équation, à chaque abscisse x répondront trois ordonnées réelles ou au moins une **. Supposons que les trois ordon-

* Le premier terme est délivré de son coefficient, parce que l'on peut toujours se procurer une équation qui ait cette condition ainsi qu'on l'a vu dans l'Algebre.

** Parce qu'une équation d'un degré impair a au moins une racine réelle, le nombre des racines imaginaires étant toujours pair.

nées sont réelles, il est visible qu'on peut déterminer leur rapport par le moyen de l'équation, & que la somme de ces trois ordonnées sera $= -bx - c$, & leur produit $= -hx^3 - lx^2 - mx - n$ (par les propriétés des équations), ce qui auroit lieu de même en supposant deux ordonnées imaginaires.

Soit (fig. 14) une ligne du troisième ordre rapportée à l'axe ap des x , l'origine des x étant supposée en a . Faisant $ap = x$, l'ordonnée y aura trois valeurs pl , pm , $-pn^*$; donc $pl + pm - pn = -bx - c$. C'est pourquoi prenant $po = z = \frac{pl + pm - pn}{3}$, le point o sera tellement situé, qu'on aura $lo = mo + no$. En effet, de l'équation $po = \frac{pl + pm - pn}{3}$, on tire $3po - pm + pn = pl$; $pl = lo + pa$. Effaçant po de part & d'autre il vient $2po + pn - pm = lo$, ou $po + pn + po - pm$, ou $on + om = lo$. Faisant de même $PO = \frac{PL + PM - PN}{3}$, on trouvera $LO + MO = ON$, & si par les points o & O on mène la ligne oz , cette ligne aura la propriété de couper toutes les ln , LN en deux parties telles que la somme de deux lignes om , on , ou LO , OM (qu'on peut regarder comme ordonnées à la ligne oz) situées d'un côté, sera égale à l'ordonnée la , ou NO située de l'autre côté, & si om devient égale à on , alors $lo = 2 \cdot om$. Nous appellerons la ligne oz *Diametre analogue*.

* pn a le signe $-$, parce qu'elle tend du côté opposé à pl , que nous supposons positive.

24. Venons maintenant au produit $—pm \cdot pn \cdot pl$ des trois ordonnées (on met le signe $—$ à cause de pn négative) $= —hx^3 — lx^2 — mx — n$. Si on fait $y=0$ dans l'équation générale, on aura $\frac{hx^3}{h} + \frac{lx^2}{h} + \frac{mx}{h} + \frac{n}{h} = 0$.

Les racines de cette équation donneront les points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses ap ; c'est-à-dire, que $(x-ab) \cdot (x-ac) \cdot (x-ad)$.

$= x^3 + \frac{l}{h}x^2 + \frac{m}{h}x + \frac{n}{h}$, ou $h \cdot (x-ab) \cdot (x-ac) \cdot (x-ad) = hx^3 + lx^2 + mx + n$; donc $pl \cdot pm \cdot pn = h \cdot pb \cdot pc \cdot pd$ (parce que x étant $= ap$, $x-ab$ devient pb , $x-ac$ devient pc , & $x-ad$ devient pd). On aura de même $PL \times PM \cdot PN = h \cdot Pb \cdot Pc \cdot Pd$; donc $1^\circ. pl \cdot pm \cdot pn : pb \cdot pc \cdot pd :: h : 1$, c'est-à-dire, en raison constante. De même $PL \cdot PM \cdot PN : Pb \cdot Pc \cdot Pd :: h : 1$; donc $2^\circ. pm \cdot pn \cdot pl : PL \cdot PM \cdot PN :: pb \times pc \cdot pd : Pb \cdot Pc \cdot Pd$; & dans les lignes du quatrième ordre on trouvera que le produit des quatre ordonnées correspondantes à une abscisse, est au produit des quatre ordonnées correspondantes à une autre abscisse, comme le produit des quatre interceptées entre le point où se termine la première abscisse & les points où la ligne des abscisses coupe la courbe, au produit des quatre interceptées correspondantes à la seconde abscisse, & ainsi de suite pour les lignes du cinquième, sixième &c. ordre; de sorte que la courbe étant de l'ordre n (que je suppose le plus grand exposant de x), le produit de n ordonnées correspondantes à une abscisse, fera au produit de n interceptées correspondantes en raison constante, & par conséquent le premier produit est à un semblable produit de n ordonnées

correspondantes à une autre abscisse, comme le produit de n interceptées correspondantes à la première abscisse au produit de n interceptées correspondantes à la seconde abscisse.

Des branches infinies des Courbes & de leurs asymptotes.

25. L'*asymptote* d'une Courbe est une ligne droite ou courbe, qui à l'infini se confond ou coïncide avec cette courbe; si l'*asymptote* est rectiligne, elle est censée tangente de la courbe à l'infini. Si une Courbe a une branche infinie, & que d'un point de cette branche infiniment éloigné on suppose menée une ordonnée perpendiculaire, il est visible que l'abscisse x ou l'ordonnée y , ou toutes les deux seront infinies. C'est pourquoi à une abscisse finie répondra une ordonnée réelle infinie, ou à une abscisse infinie une ordonnée finie ou infinie. Pour faire la recherche de ces sortes de branches, je partage l'équation d'une Courbe quelconque en plusieurs membres P, Q, R, S, &c. Le premier membre P contient tous les termes dans lesquels la somme des exposants de x & y est $= n$, en supposant que n désigne le degré de l'équation, le second membre Q contient tous ceux dans lesquels cette somme $= n - 1$; R représente tous ceux dans lesquels cette somme $= n - 2$, &c. *

On doit principalement faire attention au pre-

* Si un terme contient x^n , il est censé contenir $y^0 x^n$, parce que $y^0 = 1$. De même la quantité $b y^n$ est $= b x^0 y^n$; or $0 + n = n$; donc dans ces quantités la somme des exposants de x & y est $= n$.

mier membre P. Si ce membre n'a aucun facteur simple réel, mais s'il a au contraire tous ses facteurs imaginaires (ce qui ne peut arriver qu'en supposant que n est un nombre pair), la Courbe n'a aucune branche infinie. En effet il est nécessaire dans ce cas que P contienne x^n , & y^n : car si x^n ou y^n manquoit, P seroit divisible par x ou par y ; donc P auroit un facteur simple qui ne seroit pas imaginaire. Si la courbe a une branche infinie, x ou y ou tous les deux seront infinis ; donc P sera égal à l'infini élevé à la puissance n , c'est-à-dire, $= \infty^n$. Mais les membres suivans Q, R, &c. représentent tout au plus les infinis ∞^{n-1} , ∞^{n-2} , &c. qui disparaissent (voyez ce que nous avons dit de l'infini dans le Calcul) devant ∞^n ; donc l'équation devient $P = 0$; donc puisqu'on suppose que dans P il n'y a aucun facteur réel, cette équation ne peut avoir aucune racine réelle ; donc dans ce cas à une abscisse infinie réelle, il ne répond aucun y réel ; donc la Courbe n'a aucune branche infinie. De-là vient que la Courbe représentée par une équation de cette forme $y^2 + axy + bx^2 + cx + dy + g = 0$, n'a aucune branche infinie lorsque le carré de la moitié du coefficient du second terme est plus petit que le coefficient du troisième ; car dans ce cas la Courbe est une Ellipse, & le membre P qui est ici $y^2 + axy + bx^2$ ne peut être résolu en facteurs réels (12.) *.

26. Si le premier membre P a un facteur réel, $ay - bx$, en changeant les coordonnées on peut

* Nous avons appelé b (12.) ce que nous appelons ici a , & m ce que nous appelons b .

se procurer une équation dans laquelle ce facteur réel de P soit l'ordonnée elle-même. Supposons que qc (fig. 15) représente la Courbe de l'équation, les ab étant x , & les cb étant y . Prenant $am = a$ & faisant la perpendiculaire correspondante $mn = b$, tirez ad & supposant l'angle $nam = s$, on aura $\cos. s : \sin. s :: r : \text{tang. } s$, ou $am(a) : mn(b) :: r : \text{tang. } s = \frac{r \cdot b}{a}$. Le triangle amn donne encore $an = \sqrt{(a^2 + b^2)}$: $nm(b) :: r : \sinus s = \frac{r \cdot b}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$. Le même triangle donne $\sqrt{(a^2 + b^2)} : a :: r : \cos. s = \frac{ar}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$. Du point c de la Courbe tirant cd perpendiculaire sur ad , je ferai $ad = t$, $cd = u$, & menant bp , bf parallèles aux nouvelles coordonnées, les triangles amn , abp ayant un angle commun en a , & les angles m & p droits sont semblables; donc $an : am :: ab : ap = \frac{ax}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$.

On a aussi $an : mn :: ab : bp = \frac{bx}{\sqrt{(aa + bb)}}$.

De plus les triangles apb , $fc b$ ont les angles p & f droits, & les angles en a & c égaux : car les angles $b c f$, $c b p$ étant alternes internes sont égaux; or $c b p$ est complément de $a b p$, aussi bien que l'angle a ; donc l'angle c de l'un est égal à l'angle a de l'autre; donc les triangles $b c f$, $a p b$ sont semblables, & par conséquent aussi les triangles anm , $c b f$ le sont; donc $an : mn :: cb : bf = pd = \frac{by}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$. Les mêmes trian-

gles donnent $\sqrt{(a^2 + b^2)} : a :: y : cf = \frac{ay}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$;

or $t = ap + pd$ & $u = fc - fd = cf - bp$;

donc $t = \frac{ax + by}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, & $u = \frac{ay - bx}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Si l'an-

gle $s = 45^\circ$, l'on aura $b = a$, & alors $t = \frac{x + y}{\sqrt{2}}$, $u = \frac{y - x}{\sqrt{2}}$. De l'équation $u = \frac{ay - bx}{\sqrt{a^2 + b^2}}$,

on tire $u \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = ay - bx$; donc (puisque $ay - bx$ est un facteur réel du premier membre P) u sera un facteur réel de P dans la nouvelle équation qu'on trouvera en substituant les valeurs de x & y en t , u & constantes ; car des équations

précédentes on tire $y = \frac{au + bt}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $x = \frac{at - bu}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Si P avoit pour facteur $(ay - bx)^2$, ou $(ay - bx)^3$, &c. dans le premier cas u^2 , & dans le second u^3 seroit facteur de P. Si x & non y étoit facteur de P, dans ce cas on pourroit changer x en y (voyez le n° 5.) & réciproquement.

27. Supposons maintenant en premier lieu que y est un facteur de P tel qu'il n'y en ait aucun autre qui lui soit égal. C'est pourquoi soit $P = yM$, M étant du degré $n - 1$, on aura donc la formule $yM + Q + R + S + \&c. = 0$, ou $yM = -Q - R - S - \&c.$ & $y = \frac{-Q - R - S - \&c.}{M}$.

Mais Q étant du degré ∞^{n-1} , R du degré ∞^{n-2} , S du degré ∞^{n-3} , R & S disparaissent

devant Q ; donc $y = \frac{-Q}{M}$. Mais Q & M sont du

degré ∞^{n-1} ; donc y est fini. Effaçant donc dans Q & M les quantités multipliées par y^2 , comme infiniment plus petites que les autres * & faisant

* Parce que y étant fini, ces quantités seront au moins de l'ordre ∞^{n-3} .

$-\frac{Q}{M} = p$, nous aurons $y = p$; donc l'équation $y - p = 0$ est contenue dans l'équation $P + Q + R + \&c. = 0$, si la Courbe a quelque branche infinie. Mais $y - p = 0$ est l'équation à une ligne droite parallèle à la ligne des abscisses (6.), & distante de cette ligne de la quantité p ; donc la Courbe à l'infini coïncide avec cette droite, qui par conséquent est son asymptote rectiligne, & cela soit qu'on prenne x positif ou négatif; il paroît donc que la Courbe a deux branches infinies, l'une du côté des x positifs, l'autre du côté des x négatifs qui ont pour asymptote la même ligne prolongée à l'infini de part & d'autre.

Voilà ce qui arrive si le second membre Q se trouve dans l'équation sans être divisible par y . Si Q est divisible par y , faisant $Q = yN$, N sera du degré ∞^{n-2} ; donc N sera $= 0$ respectivement à yM ; donc l'équation subsistera entre les termes $yM + R + S + \&c. = 0$, la même qu'on auroit si Q étoit $= 0$, ou si Q ne se trouvoit point dans l'équation. Dans ce cas on aura $y = \frac{-R}{M} - \frac{S}{M} + \&c.$

$\frac{S}{M} + \&c.$ M étant du degré ∞^{n-1} , R du degré ∞^{n-2} , S du degré ∞^{n-3} , &c. Mais cette équation ne peut avoir lieu si y n'est infiniment petit, parce que $\frac{-R}{M} - \frac{S}{M} = \frac{1}{\infty}$ *.

$$* \text{ Car } \frac{R}{M} = \frac{\infty^{n-2}}{\infty^{n-1}} = \frac{1}{\infty}, \text{ \& } \frac{S}{M} = \frac{\infty^{n-3}}{\infty^{n-1}} = \frac{1}{\infty^2}; \text{ or }$$

$$\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty}.$$

28 Si R se trouve dans l'équation sans être divisible par y , effaçant dans $-\frac{R}{M}$ tous les termes dans lesquels y se trouve, l'on aura $y = \frac{P}{x}$, p étant une quantité finie. Si R manque dans l'équation, ou si R a un facteur y , on aura $y = -\frac{S}{M} = \frac{P}{x^2}$ (parce qu'alors R disparaît devant yM). Si on suppose de plus que S manque dans l'équation, ou que S soit divisible par y , l'on aura $y = \frac{P}{x^3}$ *;

- de sorte qu'en général y devient $= \frac{P}{x^g}$. Si g est un nombre impair & p une quantité positive, x étant supposé positif, y le sera aussi; mais x étant négatif y sera négatif. Si g est un nombre pair, y sera positif ou négatif selon que p sera positif ou négatif; & dans tous ces cas la ligne des abscisses est l'asymptote de la Courbe, ce qui a lieu de même g étant impair, & p négatif. En effet faisant $x = \infty$, on aura $y = \frac{P}{\infty^g}$; donc à l'infini, y est un infiniment petit de l'ordre g ; donc la ligne des abscisses coïncide avec la Courbe, ou devient sa tangente à une distance infinie. Les asymptotes désignées par la formule $y = \frac{P}{x^g}$ sont des lignes droites, on les appelle *hyperboliques*.

* p est une quantité finie qui varie selon que Q, ou R, ou S, ou &c. manquent dans l'équation.

En effet l'équation $y^m x^n = a^{m+n}$, aux hyperboles

de tous les genres, donne $y = \frac{a^{\frac{m+n}{n}}}{x^{\frac{m}{n}}} = \frac{p}{x^g}$, en

faisant $a^{\frac{m+n}{n}} = p$ & $\frac{n}{m} = g$. Mais à l'infini

l'on a $y = \frac{p}{x^g}$. L'on détermine donc par cette méthode une Hyperbole avec laquelle une Courbe donnée se confond à une distance infinie. C'est pourquoi l'on connoît non-seulement que la Courbe a une asymptote droite, mais on détermine encore de quel côté elle est située par rapport à l'asymptote. Si tous les termes Q, R, S, &c. manquoient dans l'équation, elle deviendrait $yM = 0$, laquelle étant divisible par y , fait voir que la Courbe est complexe, étant composée d'une droite qui est la ligne même des abscisses * & d'une Courbe de l'ordre $n - 1$. Si on trouve $y = p$ (p étant une quantité constante), dans ce cas l'asymptote est une droite parallèle à la ligne des abscisses, ainsi que nous l'avons dit ci-dessus (6.). Pour faire que les abscisses se trouvent sur l'asymptote, on supposera $y - p = u$, ou $y = u + p$. Substituant dans l'équation cette valeur de y & faisant x infini, u sera infiniment petit, puisque à l'infini, $u = y - p = p - p$. Etant donc donnée l'équation d'une Courbe, cherchez le nombre des facteurs réels & inégaux du membre P, & vous

* Car l'équation $yM = 0$, est divisible par $y = 0$. Mais l'équation $y = 0$ donne (6.) la ligne des abscisses.

aurez autant de paires de branches infinies & autant d'asymptotes que vous aurez trouvé de facteurs. Quant au genre de l'asymptote hyperbolique, vous le trouverez aisément par la méthode ci-dessus.

29. Supposons maintenant que P a un facteur réel double y^2 , en sorte que $P = y^2 M$, M étant une fonction du degré $n-2$. Dans ce cas l'équation deviendra $y^2 M + Q + R + \&c. = 0$. Si Q se trouve dans l'équation sans être divisible par y , les termes $R, S, \&c.$ s'évanouissant devant Q , l'équation deviendra $y^2 M = -Q$. Cette équation peut être vraie si y^2 est $= \infty$, comme x . Dans ce cas $y = \sqrt{\infty} = \infty^{\frac{1}{2}}$; c'est-à-dire, infinie par rapport à l'unité, mais infiniment petite par rapport à x : car $1 : \infty^{\frac{1}{2}} :: \infty^{\frac{1}{2}} : \infty$; donc disposant l'équation de cette manière $y^2 = -\frac{Q}{M}$, tous les termes qui contiendront y , infiniment petit par rapport à x , s'évanouiront dans la fraction $-\frac{Q}{M}$; donc puisque Q est du degré $n-1$, M du degré $n-2$, on aura $-\frac{Q}{M} = px^*$, p étant une quantité finie & constante; donc $y^2 = px$, équation à la parabole vulgaire, p étant positif, les branches s'étendent du côté des x positifs; mais elles s'étendent du côté des x négatifs dans le cas contraire; donc la Courbe a deux branches infinies du même côté, entre lesquelles se trouve la ligne des abscisses.

Si l'on veut une parabole avec laquelle la Courbe

* Parce que ce quotient doit être $= \infty$; or x est supposé infini.

convienne plus intimement à une distance infinie , il ne faut pas négliger le terme suivant R , mais on doit prendre l'équation $y^2 + \frac{Q}{M} + \frac{R}{M} = 0$.

Parce que R & M sont des fonctions du même degré $n - 2$, effaçant les termes qui deviennent infiniment petits , on aura $\frac{R}{M} = q$, quantité finie ;

donc on aura l'équation $y^2 = px + q = \left(x + \frac{q}{p}\right) \cdot p$, équation à une parabole de même parametre ; mais dont le sommet est éloigné de l'origine des abscisses de la quantité $\frac{q}{p}$.

30. Supposons maintenant que le second membre Q est divisible par y^2 ; de manière que $y^2 N$ soit = Q , N étant une fonction du degré $n - 3$. Puisque M est une fonction du degré $n - 2$, il est évident que $y^2 N$ sera infiniment petit par rapport à $y^2 M$. C'est donc la même chose que Q manque dans l'équation ou soit divisible par y^2 , ce qu'on doit dire de même de R , S , &c. Dans cette hypothese si R se trouve dans l'équation sans être divisible par y , l'équation sera $y^2 + \frac{R}{M} = 0$; or R & M étant du même degré $n - 2$, on aura $y^2 = -\frac{R}{M} = p$ (quantité finie & constante) , & $y = \pm \sqrt{p}$. Si p est négatif , y sera imaginaire ; donc dans ce cas la Courbe n'a aucune branche infinie. Si p est positif , la Courbe a deux asymptotes rectilignes & paralleles à la ligne des abscisses qui se trouve au milieu également éloignée de

l'une & de l'autre. Pour connoître le genre de l'asymptote, on fera $v - \sqrt{p} = u$. Cela fait par les regles que nous avons données, ou dont nous parlerons dans la suite, on connoîtra le genre d'une asymptote. De même faisant $y + \sqrt{p} = u$, ou $y = u - \sqrt{p}$, on déterminera le genre de l'autre asymptote.

31. Si non-seulement Q, mais encore R manque dans l'équation, ou si R est divisible par y^2 , l'équation deviendra $y^2 = -\frac{S}{M} = \frac{P}{x}$. Si S manque aussi, ou est divisible par y^2 , l'équation sera $y^2 = -\frac{T}{M} = \frac{P}{x^2}$, & ainsi de suite; de sorte qu'en général on aura $y^2 = \frac{P}{x^g}$, équation qui fera connoître & le nombre des branches infinies & le genre de l'asymptote.

Dans l'équation $y^2 = \frac{P}{x^g}$, soit d'abord supposé g un nombre impair. Si p est positif, du côté des x positifs, y a deux valeurs égales, l'une positive, l'autre négative; donc l'asymptote est hyperbolique, & la Courbe a deux branches, entre lesquelles se trouve l'asymptote rectiligne. Mais du côté des x négatifs y étant imaginaire, la Courbe ne peut avoir aucune branche infinie de ce côté-là. Le contraire arrive, p étant négatif. Si g est un nombre pair, p étant positif, y a deux valeurs réelles, soit du côté des x positifs, soit du côté des x négatifs; donc l'asymptote est hyperbolique & la Courbe a quatre branches infinies. Mais p étant négatif, y est imaginaire & la Courbe n'a aucune branche infinie.

Le cas dans lequel Q ou les membres suivans sont divisibles par y , est plus difficile. Si R se trouve dans l'équation, Q étant divisible par y & non pas R , soit $Q = yN$, N étant une fonction du degré $n - 2$, de même que M & R ; donc l'équation subsiste entre les trois termes $y^2 M + yN + R = 0$. Cette équation, en supposant $x = \infty$, peut avoir lieu si y est fini; on aura donc $y^2 - py - q = 0$ (parce que $\frac{N}{M}$, $\frac{R}{M}$ deviennent des constantes p & q). Si l'équation $y^2 - py - q = 0$, a ses racines imaginaires, la Courbe n'a point de branches infinies. Si les racines de cette équation sont réelles, il y aura une double asymptote rectiligne, parallèle à la ligne des abscisses. Ces asymptotes se confondront si les deux valeurs de y sont égales.

32. Si R manque ou est divisible par y , l'on a l'équation $y^2 M + yN + S = 0$, qu'on peut réduire à cette forme $y^2 - py - \frac{q}{x} = 0$. Si S

manque aussi, on aura $y^2 - py - \frac{q}{xx} = 0$, & ainsi de suite. Si Q ne se trouve pas dans l'équation, ou est divisible par y^2 , R étant supposée contenir y , en sorte que $R = yN$, N étant du degré $n - 3$, si S se trouve dans l'équation sans être divisible par y , l'équation deviendra $y^2 - \frac{py}{x} -$

$\frac{q}{x} = 0$. Eloignant S & non T , l'on a $y^2 - \frac{py}{x} - \frac{q}{x^2} = 0$; & ainsi de suite. Si R est $= 0$, ou divisible par y^2 , & S divisible par y ; si S est sup-

posée ensuite manquer dans l'équation ; &c. on aura successivement les équations $y^2 - \frac{py}{x^2} - \frac{q}{x^2} = 0$;

$$y^2 - \frac{py}{x^2} - \frac{q}{x^2} = 0 ;$$

& ainsi de suite. C'est pourquoi dans tous ces cas on trouve une équation à trois termes de cette forme $y^2 - \frac{py}{xf} - \frac{q}{x^2} = 0$, dans laquelle g est plus grand que f , ou tout au moins $= f$.

Pour savoir ce qui arrive en supposant $x = \infty$, comparez deux termes de l'équation & déterminez le degré de y , en sorte que ces deux termes soient homogènes. Si le troisième se trouve infiniment petit par rapport aux autres, l'équation subsiste entre les termes comparés. Mais si le troisième est du même degré que les autres, on ne doit pas l'omettre. Si le troisième est infini respectivement aux autres, l'équation ne peut subsister entre les termes comparés. Faites la même chose pour chaque paire de termes. Cette méthode s'applique aussi aux équations qui ont plus de trois termes, en faisant pour la somme des termes négligés les mêmes raisonnemens que nous venons de faire pour le troisième dans le cas du trinôme.

Dans le trinôme trouvé, pour que les deux premiers termes soient homogènes, c'est-à-dire, du même ordre d'infini, il est nécessaire que y soit du degré $\frac{1}{\infty f}$ * ; donc les deux premiers termes sont

* A cause que x est supposé $= \infty$, l'on a $y^2 - \frac{py}{xf} = \frac{1}{\infty^2 f} - \frac{p}{\infty^2 f}$.

du degré $\frac{1}{\infty 2f}$, le troisieme terme étant du degré

$\frac{1}{\infty g}$. Si $g = 2f$, le troisieme terme est homogene aux deux autres, & l'on ne doit pas le négliger; donc on aura l'équation $y^2 - \frac{py}{xf} - \frac{q}{x^2f} = 0$.

Si les racines de cette équation sont imaginaires, la Courbe n'a point de branches infinies; si les racines sont réelles il y a deux asymptotes hyperboliques du degré $\frac{1}{\infty f}$ *, qui se confondent en une

si les deux racines sont égales. Si $g < 2f$, le dernier terme est infiniment grand en comparaison des deux premiers; donc l'équation ne peut subsister entre les premiers. Examinons si elle peut avoir lieu entre le premier & le dernier. Pour que ces termes soient homogenes, y doit être du degré $\frac{1}{\infty 2}$, alors l'un & l'autre terme fera du

degré $\frac{1}{\infty g}$, le second étant dans ce cas du degré $\frac{1}{\infty 2 + f}$; or $\left(\frac{g}{2} + f\right) > g$, si $2f > g$; donc le

* Si l'on suppose $p = -4$ & $q = -4$, on verra aisément que cette équation devient $\left(y + \frac{2}{xf}\right) \times \left(y + \frac{2}{xf}\right) = 0$; donc y fera un infiniment petit de l'ordre $\frac{1}{\infty f}$, en supposant $x = \frac{1}{\infty}$. On peut prouver cela généralement, en résolvant l'équation ci-dessus.

second s'évanouit devant les deux autres & l'on a l'équation $y^2 - \frac{q}{x^g} = 0$ qui détermine le genre de l'asymptote. La comparaison du second & du troisième terme ne donne rien dans cette supposition ; parce que le premier devient infini par rapport aux deux autres. Si $g > 2f$, l'équation a lieu entre les deux premiers, le dernier devenant infiniment petit respectivement aux autres ; donc $y = \frac{p}{x^f}$, qui désigne une asymptote hyperbolique.

Si on suppose le premier & le dernier termes homogènes, le second se trouve infiniment plus grand que les autres ; donc il ne peut y avoir d'équation entre le premier & le dernier. Le second & le dernier seront homogènes, si y est du degré $\frac{1}{2g-2f}$. Dans ce cas le premier est du degré $\frac{1}{\infty g-f}$ & par conséquent il s'évanouit devant les deux autres : car $(2g-2f) > g$; donc on aura $y = -\frac{q}{p x^g - f}$, qui désigne le genre de l'asymptote.

33. Si le premier membre P contient le facteur y^3 , en sorte qu'on ait $P = y^3 M$, M étant du degré $n-3$, si Q se trouve dans l'équation sans être divisible par y , l'équation aura lieu entre les deux premiers termes, & l'on aura $y^3 = -\frac{Q}{M}$. Q est du degré $n-1$, M du degré $n-3$; donc y^3 doit être du degré ∞^2 , en faisant $x = \infty$; donc $y = \infty^{\frac{2}{3}}$, & par conséquent infiniment petit par rapport à $x = \infty$. Rejetant les termes évanouissans & faisant la division, il vient $y^3 = p x^3$; donc à l'infini

la Courbe convient avec la seconde parabole cubique, qui est son asymptote curviligne : elle a donc deux branches infinies, l'une du côté des x positifs, l'autre du côté des négatifs. Si p est positif, les branches sont situées du côté des ordonnées positives, & du côté des négatives, si p est négatif.

Supposons maintenant que le membre Q est divisible par y^3 , il est visible qu'il disparoit devant P , ce qu'on doit dire aussi des membres suivans ; ainsi c'est la même chose que ces membres manquent dans l'équation, ou qu'ils soient divisibles par y^3 . Si Q est divisible par y^3 , ou manque dans

l'équation, on aura $y^3 = \frac{-R}{M} = px$, en sup-

posant x infini ; donc $y^3 = px$, équation à la premiere parabole cubique * ; donc la Courbe a une asymptote curviligne du genre parabolique, qui a deux branches infinies, l'une du côté des x positifs, l'autre du côté des x négatifs. Dans ce

cas $y = \sqrt[3]{px}$; donc y est de l'ordre $\infty^{\frac{1}{3}}$, c'est-à-dire que y est infini par rapport à l'unité ; mais infiniment petit par rapport à $x = \infty$.

Si R manque aussi dans l'équation, ou est divisible par y^3 & que les membres suivans ne soient pas divisibles par y , l'on aura l'équation $y^3 = \frac{-S}{M}$, & parce que S & M sont du même degré, l'on aura $\frac{-S}{M} = p$, quantité finie ; donc $y^3 = p$. Cette

* L'équation à la premiere parabole cubique est $y^3 = a^2x = px$ en faisant $p = a^2$.

équation ayant une racine réelle & deux imaginaires *, fait voir que la Courbe n'a qu'une seule asymptote rectiligne, dont on déterminera le genre par la méthode ci-dessus.

Si S manque dans l'équation, ou est divisible par y^3 , on aura $y^3 = \frac{-T}{M} = \frac{p}{x}$. T manquant ou étant divisible par y^3 , on aura $y^3 = \frac{p}{x^2}$. En général $y^3 = \frac{p}{x^k}$, qui désigne une asymptote hyperbolique.

34. Si Q est divisible par y^2 , de sorte que Q soit $= y^2 N$, N étant du degré $n-3$, l'on aura l'équation $y^3 M + y^2 N + R = 0$, ou $y^3 + y^2 \frac{N}{M} + \frac{R}{M} = 0$. Comme cette équation ne peut avoir lieu qu'en supposant y infiniment petit par rapport à x (parce que R est du degré $n-2$), on a $y^3 - p y^2 - q x = 0$. Si y^3 est supposé du même ordre que x , le terme du milieu $p y^2$ disparaîtra devant les deux autres; donc on aura $y^3 = q x$, équation qui donne une asymptote parabolique du degré $\frac{1}{3}$, avec laquelle se confondent deux branches de la Courbe, l'une du côté des x positifs, l'autre du côté des

* Pour le prouver supposez $p = d^3$, on aura $y^3 - d^3 = 0$, divisant par $y - d = 0$, le quotient donnera l'équation $y^2 + y d + d^2 = 0$, dont les racines sont $y = -\frac{d}{2} \pm \frac{d}{2} \sqrt{-3}$; donc la seule racine réelle est $y = d$.

x négatifs : il n'y a aucune autre équation possible. Si R est divisible par y^2 ou manque dans l'équation, il vient $y^3 - py^2 - q = 0$, équation qui subsiste en supposant y fini. L'ordonnée y a une valeur réelle ou trois. Dans le premier cas il y aura une asymptote parallèle à la ligne des abscisses, trois dans le second cas, à moins cependant que deux se confondent en une seule *. Quant au genre de l'asymptote on le connoîtra par les règles ci-dessus. Si non-seulement R , mais encore S manque dans l'équation ou est divisible par y^2 , on aura $y^3 - py^2 - \frac{q}{x} = 0$. T manquant ou étant divisible par y^2 , l'on a $y^3 - py^2 - \frac{q}{x^2} = 0$; & en général $y^3 - py^2 - \frac{q}{x^s} = 0$. De-là résultent deux équations, $y^3 = p y^2$, ou $y = p$, qui donne une asymptote dont il faut chercher le genre, & $y^2 = \frac{-q}{p x^s}$, qui donne une asymptote du genre hyperbolique. Si Q manquant, R est divisible par y^2 , l'on a $y^3 - \frac{p y^2}{x} - \frac{q}{x^s} = 0$. Si R manquant, S est divisible par y^2 , l'on aura $y^3 - \frac{p y^2}{x^2} - \frac{q}{x^s} = 0$. C'est pourquoi on a en général $y^3 - \frac{p y^2}{x^f} - \frac{q}{x^s} = 0$. Dans cette équation

* Car les valeurs de y ne peuvent être toutes les trois égales, autrement le troisième terme ne manqueroit pas dans l'équation. Voyez l'Algebre.

tion f ne peut être plus grande que g , mais elle peut être moindre ou égale.

Il peut arriver que g l'on ait $> 3f$, ou $g = 3f$, ou $g < 3f$. Dans le premier cas on a les deux équations $y = \frac{p}{x^f}$, $y^3 = \frac{-q}{p x^{3f-f}}$, qui déterminent le genre

de l'asymptote. Si $g = 3f$, supposant y de l'ordre $\frac{1}{\infty f}$, le troisième terme est du même ordre que les deux premiers; donc l'équation subsiste entre les trois termes, & y aura une ou trois valeurs de l'ordre $\frac{1}{\infty f}$. Si $g < 3f$, l'on aura l'équation $y^3 = \frac{q}{x^f}$.

On voit facilement de quel genre est l'asymptote dans les deux derniers cas.

35. Si Q est divisible par y & non pas R , on trouvera le trinôme $y^3 - p y x - q x = 0$, qui donne deux équations $y^2 = p x$, $y^3 = \frac{-q}{p}$.

La première équation marque une asymptote parabolique, la seconde une asymptote rectiligne, dont on déterminera le genre par la méthode ci-dessus*.

Si R manque & non pas S , l'on aura $y^3 - p y x - q = 0$, d'où l'on tire $y^2 = p x$ & $y = \frac{-q}{p x}$. En

général on aura $y^3 - p y x - \frac{q}{x^f} = 0$, d'où l'on

tire $y^2 = p x$ & $y = \frac{-q}{p x^{\frac{f}{2}+1}}$.

* C'est-à-dire, on déterminera la Courbe avec laquelle se confond à l'infini celle de l'équation.

Q ne se trouvant pas dans l'équation, supposons R divisible par y , mais non pas S, l'on aura $y^3 - py - q = 0$, équation qui a lieu en supposant y fini. Comme y dans cette équation a une valeur réelle ou trois, il y aura une ou trois asymptotes rectilignes, dont deux pourront tomber l'une sur l'autre si y a deux valeurs égales. Si S manque & non T, ou T & non V, &c. on aura en général $y^3 - py - \frac{q}{x^g} = 0$, d'où, $y^3 = p$ & $y = \sqrt[3]{\frac{p}{x^g}}$. La

seconde équation donne une asymptote hyperbolique; la première deux asymptotes rectilignes, si p est positif, & deux asymptotes imaginaires p étant négatif; c'est-à-dire, que dans ce dernier cas cette équation ne donne aucune branche infinie.

Si Q ne contenant pas y , quelqu'un des membres suivans est divisible par y , l'équation sera de cette forme $y^3 - \frac{p y}{x^f} - \frac{q}{x^g} = 0$, dans laquelle f ne

peut être plus grande que g . Il peut arriver que $3f < 2g$, que $3f = 2g$, que $3f > 2g$. Dans le premier

cas on a $y^2 = \frac{p}{x^f}$, $y = \sqrt{\frac{p}{x^f}}$, qui désignent

des asymptotes hyperboliques. Dans le second cas les trois termes étant homogènes, y a une ou trois

valeurs de degré $\frac{1}{g}$. Dans ce cas l'asymptote ou

les asymptotes sont hyperboliques. Dans le troi-

sime cas on trouve la seule équation $y^3 = \frac{q}{x^g}$ qui

donne une asymptote hyperbolique du degré $\frac{1}{g}$:

puisque de cette équation on tire $y = \sqrt[3]{\frac{q}{x^g}}$.

36. Venons à la dernière hypothèse, dans laquelle les termes qui contiennent soit y^2 , soit y se trouvent dans l'équation. Si Q a un facteur y^2 , R un facteur y ; & que S se trouve dans l'équation, l'on a $y^3 - py^2 - qy - r = 0$, qui donne pour y une ou trois valeurs réelles, une ou trois asymptotes rectilignes, à moins que deux ou même les trois ne se confondent ensemble. Si S manque dans l'équation, on prendra en général le premier des mem-

bres suivans, pour avoir $y^3 - py^2 - qy - \frac{r}{x^f} = 0$,

d'où l'on tire $y^2 - py - q = 0$ & $y = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$. La

première de ces équations donne deux asymptotes rectilignes, à moins que les valeurs de y soient imaginaires ou égales. Dans ce dernier cas les deux asymptotes se confondent en une; la seconde donne

une asymptote hyperbolique du degré $\frac{1}{\infty f}$.

R, manquant si S ou quelqu'un des membres suivans contient y , l'on aura en général $y^3 - py^2 - \frac{qy}{x^f} - \frac{r}{x^g} = 0$. Dans cette équation, f ne peut être

plus grande que g . De-là on tire cette équation $y^3 - py^2 = 0$, ou $y = p$, qui donne une asymptote rectiligne. De plus si l'on suppose y infiniment petit, y^3 disparaît devant y^2 & l'on a $y^2 + \frac{qy}{p x^f} +$

$\frac{r}{p x^e} = 0^*$, équation de la forme de celle dont on a parlé ci-devant (32). **

37. Il nous reste à examiner ce qui arrive Q manquant & un des membres suivans étant supposé divisible par y^2 . Dans ce cas on aura l'équation $y^3 - \frac{p y^2}{x^e} - \frac{q y}{x^f} - \frac{r}{x^g} = 0$, dans laquelle e ne peut être plus grand que f , ni f plus grande que g . Supposons $f = 2e$, $g = 3e$, d'où l'on tire $e = \frac{g}{3}$ & $f = \frac{2g}{3}$, ou $3f = 2g$. Si y est

du degré $\frac{1}{\infty}$, tous les termes de l'équation sont homogènes & on ne peut en négliger aucun; donc la Courbe aura une ou trois asymptotes hyperboliques du degré $\frac{1}{\infty}$; donc une ou trois asymptotes hyperboliques du même degré répondront à une même asymptote rectiligne ***.

Si les exposans de x ne sont pas tels que nous venons de les supposer, voyons si l'équation peut avoir lieu entre les deux premiers termes. Pour

* En divisant par p & changeant les signes.

** Si l'on suppose le second & le troisième terme affectés du signe —, on aura une équation qu'on pourra réduire à la forme du n°. 32, & c'est dans ce sens qu'on doit entendre ce que nous venons de dire.

*** C'est-à-dire qu'à une même ligne des abscisses, qui sera l'asymptote, répondront une ou trois Courbes hyperboliques, avec laquelle ou lesquelles la Courbe proposée se confondra à l'infini.

cela il est nécessaire que y soit du degré $\frac{1}{\infty}$, & y^3

du degré $\frac{1}{\infty^3}$. Si $f > 2c$ & $g > 3c$, l'égalité

aura lieu entre les deux premiers termes, les autres s'évanouissant. Si $g > 3c$, mais $f = 2c$, les trois premiers termes formeront l'équation. Si au contraire $g = 3c$, $f > 2c$, les deux premiers & le dernier termes formeront l'équation. Il est aisé de voir par là comment, en comparant les différents termes, on peut trouver les équations binomes ou trinomes qui doivent résulter de ces comparaisons.

Il n'est pas maintenant difficile de comprendre comment il faut procéder si le premier membre P contient y^4 , y^5 , &c.

EXEMPLE I. Soit l'équation $y^3 x.(y-x)^2 - a^3.(y+x)^3 + a^6 = 0$. Voyons d'abord ce que donne le facteur triple qui se trouve dans le premier membre P. Divisant par $M = x.(y-x)^2$,

$$\text{on a } y^3 - \frac{a^3.(y+x)^3}{x.(y-x)^2} + \frac{a^6}{x.(y-x)^2} = 0. \text{ Il}$$

est évident qu'en faisant $x = \infty$, le dernier terme disparoit devant le second; donc l'équation a lieu seulement entre les deux premiers termes: or cette équation ne peut avoir lieu, à moins que y ne soit fini *, & par conséquent ne disparoisse devant x .

* En supposant y & x d'un même ordre ∞ , l'on aura $y-x=d$, $(y-x)^2=d^2$, quantité finie, ou infiniment petite du second ordre; donc le second terme sera un infini du second ou du quatrième ordre, le premier étant un infini du troisième; si on suppose y d'un ordre infini inférieur à x , le second terme devient fini, le premier étant

Mais dans ce cas le second terme se réduit à $\frac{-a^3 x^3}{x^3}$
 $= -a^3$; donc $y^3 - a^3 = 0$, équation qui n'a
 qu'une seule valeur réelle, $y = a$, qui désigne une
 asymptote rectiligne parallèle aux abscisses. Ayant
 décrit le carré $abcd$, dont le côté $= a$; prenons
 les abscisses sur la ligne ab (fig. 16) prolongée
 s'il le faut, & les ordonnées parallèles à ca . La
 ligne cd prolongée fera l'asymptote de la Courbe.
 Pour connoître le genre de l'asymptote par la mé-
 thode donnée ci-dessus, supposons $y - a = u$, ou
 $y = a + u$; donc il est évident que u sera infi-
 niment petit, lorsque x sera $= \infty$. Ayant fait la
 substitution, je trouve $u^3 + 3au^2 + 3a^2u + a^3 -$
 $a^3 \cdot (u + a + x)^3 + \frac{a^6}{x \cdot (u + a - x)^2} = 0$. Mais
 parce que u est infiniment petit & que a disparoit
 devant $x = \infty$, on aura $u^3 + 3au^2 + 3a^2u +$
 $a^3 - a^3 + \frac{a^6}{x^3} = 0$; donc les deux premiers termes
 disparaissant devant le troisieme (à cause de u infini-
 ment petit), l'on aura $u = -\frac{a^2}{x^3}$; donc l'asymp-
 tote est du genre $\frac{1}{\infty^3}$, ayant deux branches f & p
 correspondantes à la même asymptote rectiligne
 $f d p$, l'une du côté des u positifs, l'autre du côté
 des u négatifs. On pourroit trouver la même chose
 plus facilement par cette méthode. En ne négli-

infini. Si y est supposé infini d'un ordre supérieur à celui
 de x , le second terme devient infiniment plus petit que
 le premier; donc pour que l'équation subsiste entre les pre-
 miers termes, il faut supposer y fini.

geant pas le dernier terme, l'équation seroit $y^3 - a^3 + \frac{a^6}{x^3} = 0$, ou $(y - a) \cdot (y^2 + ay + a) = -\frac{a^6}{x^3}$, ou $y - a = \frac{-a^6}{(y^2 + ay + a) \cdot x}$. Mais lorsque $y = a$, l'on a $y^2 + ay + a^2 = 3a^2$; donc $y - a = u = \frac{-a^6}{3x^3}$ comme ci-dessus.

Voyons à présent ce que donne le facteur x de P. Il faut regarder x comme l'ordonnée & y comme l'abscisse. Faisant la division par $y^3 \cdot (y - x)^2$, l'on a $x - \frac{a^3 \cdot (y + x)^3}{y^3 \cdot (y - x)^2} + \frac{a^6}{y^3 \cdot (y - x)^4} = 0$. En supposant $y = \infty$ (il est bon de se rappeler que y est représenté par x & réciproquement), le dernier terme disparoit devant le second & x devient infiniment petit; donc $x = \frac{a^3}{y^2} = \frac{a^3}{\infty^2}$, qui donne

une asymptote hyperbolique du genre $\frac{1}{\infty^2}$; il y aura donc deux branches infinies g, h du côté des x positifs, c'est-à-dire du côté de $a b$, correspondantes à l'axe des y , qui est une asymptote rectiligne.

Enfin pour déterminer quelles branches désigne le facteur double $(y - x)^2$, il faut mener la ligne ad * & trouver l'équation qui résulte en prenant les abscisses sur cette ligne. Supposons donc que les abscisses prises sur ad soient $= t$, les ordonnées

* Car supposant $(y - x)^2 = 0$, l'on a $y - x = 0$, ou $y = x$, équation à une ligne droite ad , qui fait avec l'axe des abscisses ab un angle de 45° : car faisant $ab = x$, on a $bd = y = x$.

perpendiculaires sur ad étant $= u$. Cela posé à cause de l'angle $bad = 45^\circ$, l'on a (26.) $t = \frac{y+x}{\sqrt{2}}$ & $u = \frac{y-x}{\sqrt{2}}$; donc $y = \frac{t+u}{\sqrt{2}}$, $x = \frac{t-u}{\sqrt{2}}$ *; donc faisant les substitutions, l'on aura $\frac{(u+t)^3}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{(t-u)}{\sqrt{2}} \cdot 2u^2 - a^3 t^3 \cdot 2\sqrt{2} + a^6 = 0$, ou $(u+t)^3 \cdot (t-u) \cdot u^2 - 4\sqrt{2} \cdot a^3 t^3 + 2a^6 = 0$; donc $u^2 - \frac{4\sqrt{2} \cdot a^3 t^3}{(u+t)^3 \cdot (t-u)} = 0$, en négligeant le dernier terme qui dispa- roît devant le second; donc puisque u doit être infiniment petit par rapport à t , l'on aura $u^2 = \frac{4\sqrt{2} \cdot a^3}{t}$; donc l'asymptote est hyper-

bolique & du genre $\frac{1}{\frac{\infty}{2}}$; donc on aura deux branches infinies k , i du côté des t positifs, entre lesquelles se trouvera l'asymptote rectiligne, c'est-à-dire, l'axe des t . La Courbe a donc six branches infinies & trois asymptotes du genre $\frac{1}{\frac{\infty}{3}}$, $\frac{1}{\frac{\infty}{2}}$, $\frac{1}{\frac{\infty}{\frac{1}{2}}}$.

Quant à la figure des Courbes dans un espace fini, c'est de quoi il n'est pas maintenant question.

EXEMPLE II. Soit l'équation $y^3 \cdot x^2 \cdot (y-x) =$

* En effet si dans les équations $t = \frac{y+x}{\sqrt{2}}$, $u = \frac{y-x}{\sqrt{2}}$, on fait disparaître la fraction, si on ajoute ensuite ces équations & qu'on retranche après cela la seconde de la première, on trouvera aisément les équations dont il s'agit.

$x y \cdot (y^2 + x^2) + 1 = 0$. Le facteur $y - x$ de P donne une asymptote rectiligne ba (fig. 17.), qui fait un angle demi-droit avec l'axe df des abscisses, transférant l'équation en prenant les abscisses sur ab , on trouvera $u = \frac{2}{t}$, asymptote hyperbolique qui fait voir que la Courbe a deux branches infinies bq , mc . Le facteur x^2 en prenant pn pour l'axe des abscisses, ce qui donne $y = t$ & $x = u$, fournit deux équations $u = \frac{1}{t}$, $u = \frac{1}{t^3}$. La première donne deux branches Pq , ok , la seconde deux branches ph , ti . Le facteur y^3 doit être rapporté à l'axe des x , & l'on a $t = x$, $y = u$; donc on trouvera l'équation (A) $-t^3 u^3 + t^2 u^4 - t^3 u - t u^3 + 1 = 0$, qui en faisant $t = \infty$, devient $t^3 u^3 + t^3 u = 0$, ou (en divisant par t^3) $u^3 + u = 0$, ou $u \cdot (u^2 + 1) = 0$, qui donne $u = 0$, les racines $u = \pm \sqrt{-1}$ de l'équation $u^2 + 1 = 0$ étant imaginaires. L'équation $u = 0$ donne une asymptote rectiligne qui se confond avec l'axe df . Substituant la valeur de u dans l'équation A, en regardant u comme infiniment petit ou comme 0, & supposant $t = \infty$, il est visible que $u^3 = \frac{1}{t^3}$, $u^4 = \frac{1}{t^4}$; donc l'équation deviendra $-t^3 u + 1 = 0$, d'où l'on tire $t^3 u = 1$, & $u = \frac{1}{t^3}$, qui désigne une asymptote hyperbolique, à laquelle répondent deux branches infinies dx , fs ; la Courbe a donc huit branches infinies*.

* Je n'ai pas détaillé le Calcul, qui n'a rien de difficile, je le laisse à faire aux Commencans.

REMARQUE. Les asymptotes paraboliques sont désignées par une équation de cette forme $y^{m+n} = p x^n = a^m x^n$, en faisant $p = a^m$; & les hyperboliques par l'équation $y^m = \frac{p}{x^n} = \frac{a^{m+n}}{x^n}$, en faisant de même $p = a^{m+n}$.

Diviser les Lignes algébriques d'un même ordre en especes.

38. De ce que nous venons de dire on peut tirer la méthode de diviser les lignes d'un même ordre en especes. Soit l'équation $y^3 + (lx + n)y + mx^2 + fx + g = 0$. Cette équation peut représenter toutes les lignes du second ordre, si on excepte le cas où y manque dans l'équation *. Dans ce cas la Courbe est une hyperbole, à moins que l'on ne parvienne à une équation de cette forme $xy = 0$, alors l'équation résulte de la combinaison de deux lignes droites. Lorsque le premier membre P de l'équation, c'est-à-dire, $y^2 + lxy + mx^2$, est résoluble en deux facteurs égaux, il en résulte une parabole comme nous l'avons déjà dit (12.) & comme on le trouve aussi par notre méthode. Si les facteurs de P sont réels & inégaux, il en résulte une hyperbole; or par notre méthode on trouve la même chose. Enfin si les facteurs de P sont imaginaires, en faisant $x = \infty$, l'équation ne fournit aucune asymptote possible; donc il n'y a que trois especes de lignes du second ordre, la *Parabole*, l'*Hyperbole* & l'*Ellipse*, en y comprenant le *Cercle*, qui n'est qu'une *Ellipse* dont les axes sont égaux.

39. Venons maintenant aux lignes du troisieme ordre. L'équation générale des lignes de cet ordre est $ay^3 + (bx + c)y^2 + dx^2y + fxy + gy + hx^3 + lx^2 + mx + n = 0$. Le premier membre P , c'est-à-dire, $ay^3 + by^2x + dx^2y + hx^3$ étant de dimension

* Si x^2 , par exemple, manque dans l'équation, on supposera le coefficient $m = 0$, & ainsi des autres termes.

impair, a un facteur réel ou trois *. Il y a quatre cas ; dans le premier P a un facteur réel ; si les trois facteurs sont réels & inégaux , c'est le second cas. Si deux de ces facteurs sont égaux , on a le troisième cas ; & le quatrième , lorsque les trois facteurs sont réels & égaux. Nous n'examinons pas le cas dans lequel P seroit $= 0$, parce que dans ce cas l'équation deviendroît du second degré & la courbe seroit seulement du second ordre. Parce que dans chaque cas il suffit de faire le calcul pour un seul facteur , soit ce facteur $Ay - Bx = 0$, l'on a $Ay = Bx$, d'où l'on tire $B : A :: x : y$; donc l'asymptote fera avec la ligne des abscisses un angle dont le cosinus $= B$, le sinus $= A$, & par conséquent la tangente $= \frac{A}{B}$. Si on

rapporte la courbe à cette ligne en faisant les abscisses $= t$ & les ordonnées perpendiculaires $= u$, on trouvera une équation de cette forme $at^2u + btu^2 + cu^3 + dt^2 + etu + fu^2 + gt + hu + m = 0$ (A).

Le premier membre P de cette équation $at^2u + btu^2 + cu^3$ a un facteur réel u . Supposons qu'il n'en ait pas d'autre , ce qui arrive si après avoir divisé P par u le quotient $at^2 + btu + cu^2$, n'est pas résolvable en facteurs réels , ou si $t^2 + \frac{b}{a}tu + \frac{c}{a}u^2$ n'est pas réso-

luble en facteurs réels , ou si $\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}$ est une quantité positive , ou si $b^2 < 4ac$. Si dans P on suppose $t = \infty$, l'équation subsiste entre les membres P & Q & devient dans cette supposition , $at^2u + dt^2 = 0$, d'où l'on tire (en transposant & divisant par at^2) $u = -\frac{d}{a} = a'$, en

faisant $-\frac{d}{a} = a'$. L'équation $u = a'$ désigne une asymptote droite. Pour en connoître l'espece , on fera $u - a' = y$,

* Considérant cette quantité comme une équation du troisième degré , dont y est l'inconnue , il est visible qu'elle doit avoir une ou trois racines réelles , & par conséquent un ou trois facteurs réels ; ce qui a lieu de même en considérant x comme l'inconnue.

ou $u = y + a'$, & substituant cette valeur de u * on trouvera par la méthode ci-dessus une équation de cette forme $y = \frac{P}{t}$, ou de celle-ci $y = \frac{P}{t^2}$, selon que le coefficient de t ne sera pas, après la substitution, égal à 0, ou sera = 0.

Donc la première espèce des lignes du troisième ordre a une asymptote droite de l'espèce $u = \frac{P}{t}$.

La seconde espèce a une asymptote de l'espèce $u = \frac{P}{t^2}$.

On a changé y en u , ce qui est permis.

SECOND CAS. Si P a trois facteurs réels & inégaux, chacun de ces facteurs fournira donc aussi deux asymptotes, l'une de l'espèce $u = \frac{P}{t}$, l'autre de l'espèce $u = \frac{P}{t^2}$.

Ce cas produit quatre espèces de lignes du troisième ordre, qui ont trois asymptotes droites inclinées l'une à l'autre, ces espèces sont :

La troisième espèce a trois asymptotes de l'espèce $u = \frac{P}{t}$.

La quatrième espèce a deux asymptotes de l'espèce $u = \frac{P}{t}$

& une de l'espèce $u = \frac{P}{t^2}$.

La cinquième espèce a, une asymptote de l'espèce $u = \frac{P}{t}$

& deux de l'espèce $u = \frac{P}{t^2}$.

La sixième espèce a trois asymptotes de l'espèce $u = \frac{P}{t^2}$.

En examinant si toutes ces espèces sont possibles, l'on trouvera que la cinquième ne l'est pas, parce que parmi trois asymptotes, deux ne peuvent point être de l'espèce $u = \frac{P}{t}$, sans que la troisième le soit de même ; de sorte que la sixième espèce doit être mise à la place de la cin-

* Il est aisé de voir qu'à l'infini y doit être regardé comme infiniment petit. **

quieme. Pour faire cet examen, on pourra se servir de l'équation $y \cdot (Ay - Bx) \cdot (cy - dx) + exy + fy^2 + gx + hy + i = 0^*$, dont le premier membre contient trois facteurs réels. Si l'on transforme cette équation en substituant les valeurs de x & y trouvées ci-dessus (26), & faisant $\sqrt{(a^2 + b^2)} = 1$, ce qu'on peut toujours faire, on verra que le facteur y peut fournir une asymptote de l'espece $u = \frac{p}{t}$, & qu'il en est de même de chacun des deux autres facteurs; que les trois facteurs peuvent fournir chacun une asymptote de l'espece $u = \frac{p}{t^2}$, que deux peuvent fournir une asymptote chacun de l'espece $u = \frac{p}{t}$, l'autre donnant une asymptote de l'espece $u = \frac{p}{t^2}$, mais qu'il n'est pas possible que deux donnent une asymptote de l'espece $u = \frac{p}{t^2}$, sans que l'autre en donne une de la même espece. Ainsi la cinquieme espece a trois asymptotes de l'espece $u = \frac{p}{t^2}$.

Passons au troisieme cas. Si P a un facteur double y^2 , ce qui arrive lorsque yx^2 ni x^3 ne se trouvent pas dans l'équation, tandis que y^2x & y^3 s'y trouvent, ou l'un des deux seulement, dans ce cas P aura un autre facteur de cette forme $ay - bx$ qui donnera une asymptote de la forme $u = \frac{p}{t}$, ou de la forme $u = \frac{p}{t^2}$. Le facteur y^2 peut aussi donner une asymptote de l'espece $u^2 = pt$, de-là naissent deux especes de lignes du troisieme ordre.

La sixieme espece a une asymptote de l'espece $u = \frac{p}{t}$ & une asymptote de l'espece $u^2 = pt$.

* Cette équation, quoique ne contenant pas x^2 , peut néanmoins servir à notre objet & elle est très-étendue. Si on substitue les valeurs de y & de x en t , u & constantes, la transformée contiendra t^2 dégagé de u ; & l'omission du terme affecté de x^2 ne peut rien changer à nos conclusions.

La septieme espece a une asymptote de la forme $u = \frac{p}{t^2}$ & une asymptote parabolique de l'espece $u^2 = pt$.

Il peut arriver que le premier facteur donne une seule asymptote de l'ordre $u = \frac{p}{t}$, ou de l'ordre $u = \frac{p}{t^2}$, le facteur double n'en donnant aucun. De-là naissent deux especes de lignes du troisieme ordre.

La huitieme espece a une seule asymptote de la forme $u = \frac{p}{t}$.

La neuvieme espece a une seule asymptote de la forme $u = \frac{p}{t^2}$.

Il peut se faire aussi qu'on ne trouve qu'une asymptote de l'espece $u = \frac{p}{t}$, ou de l'espece $u = \frac{p}{t^2}$ avec deux asymptotes paralleles de l'espece $u = \frac{p}{t}$, ce qui fournit encore deux especes de lignes.

La dixieme espece a une asymptote de la forme $u = \frac{p}{t}$, & deux asymptotes paralleles de l'espece $u = \frac{p}{t}$.

La onzieme espece a une asymptote de la forme $u = \frac{p}{t^2}$, & deux asymptotes paralleles de l'espece $u = \frac{p}{t}$.

Outre une asymptote de l'espece $u = \frac{p}{t}$, ou de l'espece $u = \frac{p}{t^2}$ on peut encore trouver une asymptote de l'espece $u^2 = \frac{p}{t}$, ce qui donne encore deux nouvelles especes de lignes du troisieme ordre.

La douzieme espece a une asymptote de la forme $u = \frac{p}{t}$, & une de l'espece $u^2 = \frac{p}{t}$.

La treizieme espece a une asymptote de l'espece $u = \frac{p}{t^2}$, & une de la forme $u^2 = \frac{p}{t}$.

Dans le quatrième cas enfin P a un facteur triple, & l'équation peut avoir cette forme $Ay^3 + bx^2 + cyx + dy^2 + fx + gy + m = 0$. Si le membre Q se trouve dans l'équation, c'est-à-dire, si b n'est pas $= 0$, en faisant $x = \infty$, l'équation qui subsiste entre P & Q donne $y^3 = px^2$, ce qui donne une nouvelle espèce de lignes du troisième ordre.

La quatorzième espèce a une asymptote parabolique de la forme $u^3 = pt^2$.

Si x^2 manque on aura $Ay^3 + cyx + dy^2 + fx + gy + m = 0$ (H). Supposons que c n'est pas $= 0$, dans ce cas l'équation H donne les deux suivantes. $Ay^3 + dxy = 0$, $dxy + fx = 0$, en supposant $x = \infty$. La première donne $y^2 = px$, asymptote parabolique; la seconde donne $y = d'$, asymptote rectiligne. Faisant $y = d' = u$, ou $y = u + d'$, substituant dans l'équation H cette valeur de y & changeant x en t , on trouvera une asymptote de l'espèce $u = \frac{p}{t}$.

La quinzième espèce a une asymptote parabolique de l'espèce $u^2 = pt$, & une de la forme $u = \frac{p}{t}$.

Il n'est pas difficile de voir que l'axe de la parabole est parallèle à l'asymptote droite.

Si $c = 0$, on a l'équation $Ay^3 + dy^2 + fx + gy + m = 0$, dans laquelle on ne peut pas supposer $f = 0$; autrement on n'auroit aucune abscisse, ni par conséquent aucune courbe. Faisant $x = \infty$, il est évident que y doit être infini, autrement l'équation ne pourroit pas subsister; donc l'équation doit avoir lieu entre les termes Ay^3 & fx , tous les autres s'évanouissant; donc $y^3 = px$, d'où l'on tire la seizième espèce des lignes du troisième ordre.

La seizième espèce a une asymptote parabolique de l'espèce $u^3 = pt$.

Nous laissons le détail du Calcul aux Commencans qui pourront s'y exercer avec fruit. Pour leur faciliter ce travail, nous allons exposer les équations générales dont on peut tirer chaque espèce.

Pour la première espèce. $y(x^2 - 2mxy + n^2y^2) + ay^2 + bx + cy + d = 0$, en supposant $m^2 > n^2$ & que b n'est pas $= 0$.

Pour la seconde espece. $y(x^2 - 2mxy + n^2y^2) + ay^3 + cy + d = 0$: en supposant $n^2 > m^2$.

Pour la troisieme espece. $y(x - my)(x - ny) + ay^2 + bx + cy + d = 0$, en supposant que m n'est pas $= n$, ni $b = 0$, ni $mb + c + \frac{a^2}{(m-n)^2} = c$,

$$\text{ni } nb + c + \frac{a^2}{(m-n)^2} = 0.$$

Pour la quatrieme espece. $y(x - my)(x - ny) + ay^2 + cy + d = 0$. Dans cette équation on ne doit pas avoir $m = n$, ni $c + \frac{a^2}{(m-n)^2} = 0$.

Pour la cinquieme espece. $y(x - my)(x - ny) + ay^2 - \frac{a^2y}{(m-n)^2} + d = 0$, m n'étant pas $= n$.

Pour la sixieme espece. $y^2(x - my) + ax^2 + bx + cy + d = 0$; pourvu que l'on n'ait pas $a = 0$, ni $2m^3a^2 - mb - c = 0$.

Pour la septieme espece. $y^2(x - my) + ax^2 + bx + m(2m^2a^2 - b)y + d = 0$, a n'étant pas $= 0$.

Pour la huitieme espece. $y^2(x - my) + b^2x + cy + d = 0$; si l'on n'a pas $b = 0$, ni $c = -mb^2$.

Pour la neuvieme espece. $y^2(x - my) + b^2x - mb^2y + d = 0$; si b n'est pas $= 0$.

Pour la dixieme espece. $y^2(x - my) - b^2x + cy + d = 0$; c n'étant pas $= mb^2$, ni $b = 0$.

Pour la onzieme espece. $y^2(x - my) - b^2x + mb^2y + d = 0$; pourvu que l'on n'ait pas $b = 0$.

Pour la douzieme espece. $y^2(x - my) + cy + d = 0$; c n'étant pas $= 0$.

Pour la treizieme espece. $y^2(x - my) + d = 0$.

Pour la quatorzieme espece. $y^3 + ax^2 + bxy + cy + d = 0$; a n'étant pas $= 0$.

Pour la quinzieme espece. $y^3 + bxy + cx + d = 0$; b n'étant pas $= 0$.

Pour la seizieme espece. $y^3 + ay + bx = 0$, en supposant que b n'est pas $= 0$.

M. Newton, dans l'énumération des lignes du troisieme ordre, a fait attention à la figure de la Courbe dans un espace fini; aussi a-t-il multiplié considérablement les especes

de ces Courbes *. Nous avons mieux aimé traiter cette matière d'après le savant Euler. Si l'on veut connoître les différentes figures de ces Courbes dans un espace fini, il sera bon d'appeller *genre* ce que nous avons appelé *espece*, en nommant *especes* les variations notables qui peuvent arriver à ces Courbes dans un espace fini. On peut voir maintenant comment on doit s'y prendre pour avoir les genres des Courbes du quatrième, cinquième, &c. ordre. La matière est vaste, mais elle est plus curieuse qu'utile.

*Seconde méthode pour trouver les asymptotes
des Courbes.*

40. Cette méthode est fondée sur la nature du *quarré algébrique*, dont nous parlerons bientôt.

PROBLÈME. *Etant données deux quantités de la forme $a x^m$, $b y^t$ qu'on suppose du même ordre m , trouver une autre quantité $c x^n y^p$ qui soit du même ordre que les premières & qui ait un exposant p .* Supposons $y = c x^n$, ou $y = x^n$: car le coefficient constant c ne peut changer l'ordre de x , auquel on fait ici seulement attention ; donc $y^t = x^{nt}$ & $b y^t = b x^{nt}$; donc $a x^m$ est du même ordre que $b x^{nt}$; donc $nt = m$. Car les coefficients constants & finis b & a ne changent point l'ordre de ces quantités ; donc pour qu'une quantité soit du même ordre que l'autre, il faut qu'une des variables soit telle que sa valeur étant exprimée par une puissance de l'autre variable & substituée à la place de cette variable, il en résulte la même variable avec le même exposant. Supposons maintenant $a x^m = d b y^t$, ou $y^t = \frac{a}{db} x^m = g^t x^m$; donc

* M. Newton auroit pu, en suivant sa méthode, trouver un plus grand nombre d'especes qu'il n'a fait.

$y =$

$y = g x^{\frac{m}{t}}$ & $y^p = g^p x^{\frac{mp}{t}}$. Substituant cette valeur de y^p dans $c x^n y^p$, on a $g^p x^{\frac{n}{t} + \frac{mp}{t}} = c x^n y^p$; or cette quantité est supposée du même ordre que $a x^m$; donc $m = n + \frac{mp}{t}$. Multipliant tout par t & transposant, il vient $mp = mt - nt$, d'où l'on tire (en divisant par m) $p = t - \frac{nt}{m}$. Si $n = 2$, $t = 10$, $m = 5$, p sera $= 10 - 4 = 6$, & l'on aura $a x^m$, $b y^t$, $c x^n y^p$, ou $a x^5$, $b y^{10}$, $c x^2 y^6$ du même ordre. En effet, de l'équation $y^p = g^p x^{\frac{mp}{t}}$, on tire $y^t = x^3$ (en négligeant les coefficients constants), ou $y^2 = x$. Substituant cette valeur de y^2 l'on a $a x^5$, $b x^5$, $c x^1$, quantités du même ordre. En général pourvu que l'exposant p de y soit $= t - \frac{nt}{m}$, la troisième quantité sera du même ordre que les deux premières.

COROLLAIRE I. Si sur $ab = m$, on élève la perpendiculaire $ac = t$ (fig. 18.), prenant $ad = fp = n$, $ap = fd = p$; les triangles $c ab$, cpf semblables à cause des parallèles pf , ab , donneront $ab : ac :: fp : pc$, ou $m : t :: n : pc = \frac{nt}{m}$; donc $ap = p = ac - cp$ est $= t - \frac{nt}{m}$; donc si dans la quantité $c x^n y^p = c x^n y^{ap}$ *, on met

* Quoique ad & ap soient des lignes, nous les regardons comme des exposants, parce que rien n'empêche de représenter des nombres par des lignes.

$t - \frac{n^t}{m}$ au lieu de p elle fera du même ordre que les quantités ax^{ab} , by^{ac} .

COROLLAIRE II. Puisque le point f est déterminé par $cx^{ad}y^{af}$ qu'on suppose du même ordre que ax^{ab} , by^{ac} , le point g sera aussi déterminé par $dx^{ab}y^{gi}$ en supposant cette quantité du même ordre que les précédentes ; or la position de la droite bc ne dépend que des points g & f ; donc tous les points situés sur bc détermineront des quantités du même ordre.

REMARQUE. Si m étoit négative, on prendroit le point b sur le prolongement aB de cette ligne, & si t étoit négatif on prendroit le point c sur aC , &c.

41. Passons maintenant à la construction du quarré algébrique ou analytique. Divisez en parties égales les côtés d'un quarré (fig. 19), & tirant par les points de division les lignes qui représente la figure, écrivez à la marge les différentes puissances de x & y comme vous le voyez *, & vous aurez une figure que nous appellerons *quarré algébrique* ou bien *quarré analytique*. Cela fait, chaque quantité cx^3y^1 sera déterminée par la rencontre des lignes, dont l'une va de x^3 situé à la partie supérieure du quarré à x^3 situé à la partie inférieure, l'autre ligne étant terminée aux deux côtés du quarré en y^1 & ainsi des autres. C'est pourquoi on pourra placer dans le

* On peut pour cela se servir d'une tablette de bois peinte en noir, en écrivant à la marge avec un poinçon les x & les y avec leurs exposans. On pourra se servir de blanc d'Espagne pour écrire ce qu'on veut effacer, ou bien marquer avec des épingles la position des points.

quarré algébrique tous les termes d'une équation qui ne passera pas le sixième degré, en le souvenant de placer le terme constant au point déterminé par $x^0 y^0$ *. Si l'équation étoit d'un degré plus élevé, l'on augmenteroit le quarré, afin de pouvoir placer x^7, x^8 , &c. y^7, y^8 , &c. Si l'équation contenoit $x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}$, parce que $\sqrt{2} \approx 1.41$ à-peu-près, on placeroit ce terme au concours des deux parallèles, dont l'une passeroit par le milieu de la division qui sépare x^1 & x^0 , & l'autre par la ligne qui va de y^2 à y^1 , mais un peu plus près de y^2 que de y^1 , parce que 1.41 est un peu plus petit que $1 + \frac{1}{2}$. Au reste une petite erreur n'est pas ici de conséquence: Pour placer cy , on fera attention que $cy = cx^0 y^1$. De même pour placer bx , par exemple, on remarquera que bx est $= by^0 x^1$. Il est visible qu'en supposant $x = \infty$, si l'on prend x^3 , par exemple, tous les termes du rang horizontal situés à la gauche de x^3 disparaîtront, mais au contraire tous ceux de la droite s'évanouiront, si x est $= \frac{1}{\infty}$. De même faisant $y = \infty$ & prenant y^3 , par exemple, tous les termes y^2, y^1 , &c. situés au-dessous disparaîtront, au contraire tous les termes situés au-dessus de y^3 doivent s'évanouir, en supposant $y = \frac{1}{\infty}$.

42. PROBLÈME. Etant donnée une équation entre x & y , trouver la valeur d'une des inconnues en supposant l'autre infinie ou infiniment petite. Soit l'équation

$$\begin{aligned} ax^4 y^5 &= tx^4 y^4 + fx^3 y^5 + ky^4 + my + q = 0 \\ -bx^3 y^5 &+ tx^3 y^4 + gx^2 y^5 - lx^2 y^4 - nxy \\ &+ hx^4 y^3 - px^2 y \end{aligned}$$

* Il s'agit ici des équations à deux inconnues.

En l'appliquant sur le quarré algébrique, l'ordre des points sera celui qu'on voit dans la figure, & joignant tous les points extérieurs par des lignes, on aura un polygone dont le périmetre est concave vers l'intérieur. Supposant maintenant $x = \infty$, on prendra la partie du périmetre dont la concavité est tournée vers la gauche, l'autre partie disparaissant dans ce cas, & l'on aura l'équation $-bx^3y^3 + hx^4y^3 - lx^3y^2 - px^2y + q = 0$, qui contient cinq valeurs de y , & par conséquent autant que la proposée. Pour les trouver nous partagerons l'équation en d'autres plus simples, indiquées par les côtés du périmetre de la figure.

I. $-bx^3y^3 + hx^4y^3 = 0$, ou $by^3 - hx = 0$, en changeant les signes & divisant par x^3y^3 .

II. $hx^4y^3 - lx^3y^2 - px^2y = 0$, ou en divisant par x^2y , $hx^2y^2 - lx y - p = 0$.

III. $-px^2y + q = 0$, ou en changeant les signes $px^2y - q = 0$.

De la premiere équation on tire $y = \pm \sqrt[3]{\frac{xh}{b}}$.

de la seconde $y = \frac{l \pm \sqrt{(4hp + l^2)}}{2hx}$. La troi-

sieme donne la cinquieme racine $y = \frac{q}{px^2}$.

Si l'on suppose x infiniment petit, on prendra la partie du périmetre qui est concave du côté de la droite, & l'on aura l'équation $ax^2y^3 - cxy^4 + ky^3 + my + q = 0$. Pour trouver les cinq valeurs de y que contient l'équation, on la partagera en ces trois autres indiquées par les côtés du périmetre.

I. $ax^2y' - cxy^4 = 0$, ou en divisant par xy^4 ,
 $axy - c = 0$, d'où l'on

$$\text{tire } y = \frac{c}{ax}.$$

II. $-cxy^4 + ky^2 = 0$, ou $-cxy^2 + k = 0$; donc

$$k = cxy^2, \text{ \& } y^2 = \frac{k}{cx};$$

$$\text{donc } y = \pm \sqrt{\frac{k}{cx}}.$$

III. $ky^2 + my + q = 0$, dont les racines sont

$$y = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - 4qk}}{2k}.$$

Supposant $y = \infty$, la partie du périmètre, dont la concavité, à commencer par la droite, regarde le côté inférieur du quarré, déterminera l'équation $hx^4y^3 - bx^3y' + ax^2y' - cxy^4 + ky^2 = 0$. Les quatre valeurs de x que contient cette équation, de même que la proposée, se détermineront par les équations suivantes, indiquées par les côtés du périmètre.

I. $hx^4y^3 - bx^3y' = 0$, d'où l'on tire $x = \frac{byy'}{h}$.

II. $-bx^3y' + ax^2y' = 0$, d'où l'on tire $x = \frac{a}{b}y' = \frac{a}{b}$.

III. $ax^2y' - cxy^4 = 0$, d'où l'on tire $x = \frac{c}{ay} = \frac{cy^{-1}}{a}$.

IV. $-cxy^4 + ky^2 = 0$, ou $cxy^2 - k = 0$, ou $x = \frac{ky^{-2}}{c}$.

Il est facile de voir que ces racines vont en décroissant de la première à la dernière.

Si l'on suppose y infiniment petit, la partie du périmètre qui est concave du côté supérieur du quarré, en commençant par la droite, donne

M₃

$hx^4y^3 - lx^3y^2 - px^2y + q = 0$. Les côtés du périmètre font connoître les équations suivantes.

I. $hx^4y^3 - lx^3y^2 - px^2y = 0$.

II. $-px^2y + q = 0$.

De la première on tire $hx^3y^2 - lxy - p = 0$,

ou $x = \frac{l \pm \sqrt{(4hp + l^2)}}{2hy}$.

De la seconde on tire $px^2y - q = 0$, ou

$x^2 = \frac{q}{py}$, & $x = \pm \sqrt{\left(\frac{q}{py}\right)}$.

Cette méthode réfute de la nature des équations.

En effet soit l'équation $x^3 - ax^2 + abx - abc = 0$,

$$-b + ac$$

$$-c + bc$$

dont les racines font a, b, c .

Si l'on suppose a infini par rapport à b & b infini par rapport à c , l'on a l'équation $x^3 - ax^2 + abx - abc = 0$; d'où en joignant chaque terme avec celui qui le suit, on forme ces équations plus simples $x^3 - ax^2 = 0$, ou $x - a = 0$, ou $x = a$. En second lieu $-ax^2 + abx = 0$, d'où l'on tire $x - b = 0$, ou $x = b$; en troisième lieu l'on a $abx - abc = 0$, ou $x - c = 0$, ou $x = c$.

REMARQUE I. On peut donc par le moyen du quatrè algébrique trouver facilement les racines d'une équation à deux variables x & y , dans la supposition d'une de ces variables infiniment grande ou infiniment petite.

REMARQUE II. Les racines de l'équation réduite dans la supposition de l'une des variables infinies, ne peuvent différer des racines de la même équation non réduite, que d'une quantité évanescente par rapport à ces mêmes racines; de sorte que si l'équation réduite donne $y = a$,

l'équation non réduite, donnant $y = a + B$, on doit conclure que B disparaît devant a . Il est évident que si a est imaginaire, la racine le sera aussi : mais si a est une quantité réelle & B imaginaire, la racine sera de même imaginaire. On ne peut donc pas savoir par l'équation réduite si la racine trouvée est imaginaire. Si B est une quantité imaginaire, on pourra toujours la réduire à la forme $c + d\sqrt{-1}$ (ainsi que le savent les Géomètres). De plus l'équation, outre la racine $a + c + d\sqrt{-1}$, en aura une autre $= a + c - d\sqrt{-1}$, d & c étant extrêmement petits par rapport à a ; donc dans le cas de B imaginaire, l'on aura $y = a + c + d\sqrt{-1}$ & $y = a + c - d\sqrt{-1}$; donc l'équation réduite contiendra $y - a = 0$, $y - a = 0$, c'est-à-dire, sera divisible par $(y - a)^2$. Si cela n'arrive pas, la racine ne peut être imaginaire. Si cela arrive, pour savoir si elle est imaginaire lorsqu'on cherche la valeur de y dans le cas de $x = \infty$, supposons que l'équation transportée sur le quarré analytique & réduite par la méthode ci-dessus, fournisse celle-ci $(y - a)^3 = 0$, on prendra dans l'équation non réduite les quantités de l'ordre immédiatement inférieur à celui de l'équation qui a donné $(y - a)^3 = 0$: ainsi si le côté ad du périmètre (nous appellerons ce côté une *directrice*) a donné une équation de cette forme $ax^3y^1 - bx^4y^3 = 0$, on prendra dans l'équation non réduite la quantité x^3y^4 qui appartient à l'ordre immédiatement inférieur à celui que donne la directrice ad , & tirant par x^3y^4 la directrice pq parallèle à da par le point le plus proche de la directrice ad , en sorte qu'aucun des termes contenus dans l'équation ne tombe entre les parallèles ad & pq , tous les termes situés sur

$p q$ seront d'un ordre immédiatement inférieur à ceux de la directrice $a d$ *. Ajoutant les nouveaux termes à ceux de la directrice $a d$, l'on verra s'il en résulte encore une équation de la forme $(y - g)^2 = 0$, en faisant $a + c = g$, & c étant la quantité qu'ont donné ces nouveaux termes. Si cela arrive on cherchera une nouvelle directrice qui contienne les termes de l'ordre immédiatement inférieur à ceux de la directrice $p q$, on ajoutera ces nouveaux termes, & ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait épuisé toute l'équation, ou qu'on ait cessé de trouver une équation de la forme dont nous venons de parler.

43. PROBLÈME. *Etant donnée une équation de cette forme : $ax^my^n + bx^{m+p}y^{n+p} + cx^{m+2p}y^{n+2p} + \&c. = 0$, dans laquelle les exposants des deux variables sont en progression géométrique croissante ou décroissante, les coefficients a , b , &c. étant réels, ou 0, on demande de trouver la valeur de y pour une valeur de x donnée. On peut toujours ordonner l'équation de telle sorte que les exposants de y aillent en décroissant. Il suffit, si cela est nécessaire, de renverser l'équation, en prenant le dernier terme pour le premier, le pénultième pour le second, &c. Cela posé, supposons que n , $n + p$, $n + 2p$, &c. est une progression arithmétique décroissante; c'est-*

* C'est-à-dire, qu'il n'y aura aucun ordre intermédiaire entre l'ordre de la directrice $a d$ & celui de la directrice $p q$, quoique d'ailleurs les ordres de ces directrices puissent être éloignés l'un de l'autre. Si l'ordre de la directrice $a d$ est le dixième, & celui de la directrice $p q$ le septième ordre; il n'y aura dans l'équation, aucun terme d'un ordre intermédiaire entre le septième & le dixième.

à-dire, supposons que p est négatif; divisez l'équation par $x^m y^n$, ce facteur contient une racine $y = 0$. On aura $a + b x' y^p + c x'^2 y^{2p} + \&c. = 0$. Faisons $x' y^p = z$, substituant cette valeur de $x' y^p$, il vient $a + b z + c z^2 + d z^3 + \&c. = 0$. Cherchez les valeurs de z , c'est-à-dire, les racines de cette équation, & cela par approximation si l'on ne peut les avoir autrement, & z sera supposé connu. Mais l'on a $x' y^p = z$; donc $y^p = \frac{z}{x'}$, ou $y = \sqrt[p]{\frac{z}{x'}}$; donc on aura les valeurs de y , puisqu'on connoît z & que x est donné par supposition.

COROLLAIRE. Si l'on fait $\sqrt[p]{z} = a$ & $-\frac{t}{p} = q$,

on aura $y = \sqrt[p]{\frac{z}{x'}} = \frac{z^{\frac{1}{p}}}{x'^{\frac{1}{p}}} = z^{\frac{1}{p}} x'^{-\frac{1}{p}} = a x'^q$, quan-

tité imaginaire si a est imaginaire, ou si a étant réel, q est une fraction de cette forme $\frac{n}{2}$, n étant un nombre impair & x étant supposé négatif.

EXEMPLE. Soit l'équation $ay^6 + bxy^4 + cx^2y^2 + dx^3 = 0$, on aura $n = 6$, $p = -2$, $m = 0$, $t = 1$. Divisant par $y^6 = x^m y^n$, il vient $a + bxy^{-2} + cx^2y^{-4} + dx^3y^{-6} = 0$. Faisant xy^{-2} , ou $\frac{x}{y^2} = z$, il en résulte $a + bz + cz^2 + dz^3 = 0$; ce qu'on pouvoit tirer de l'autre équation en faisant $y = 1$ & $x' = z$, & qu'il est bon de remarquer, parce qu'il en est de même dans les autres cas. Supposant maintenant z connu par le moyen de l'équation que nous venons de trouver,

nous aurons $\frac{\frac{1}{2}P}{\frac{1}{2}x^p} = ax^q = \frac{1}{2}x^q = \frac{1}{2} \times 3$, en sup-

posant $x = 9$, & $q = 4$. Il est aisé de voir que dans ax^q , la valeur de a peut n'être pas la même que dans l'équation proposée.

44. PROBLÈME. *Étant donnée une équation algébrique entre x & y , trouver la valeur de y par une série composée de x & constantes, & cela d'autant plus exactement qu'on prendra un plus grand nombre de termes.* Supposons d'abord $x = \infty$. Réduisant l'équation dans cette supposition par le moyen du quarré algébrique, on trouvera les racines y , dont les valeurs auront la forme ax^q , a étant une quantité constante quelconque, & q un exposant quelconque. Prenant une de ces racines ax^q , substituez dans l'équation, $Y + ax^q$ à la place de y ; réduisez de même l'équation qui en résultera, dans la supposition de $x = \infty$ & cherchez les nouvelles racines Y . Si vous en trouvez plusieurs, prenez celle qui est du plus bas ordre. Soit donc $Y = Bx^r$. Dans la dernière équation dont les variables sont x & Y , écrivez à la place de Y la quantité $y' + Y$, ou plutôt $y' + Bx^r$, vous aurez une nouvelle équation entre x & y' . Continuez de même à substituer, en cherchant toujours la valeur du dernier y' , y'' , &c. substituez jusqu'à ce que vous arriviez à une quantité imaginaire, ou que la série soit finie, ou que vous ayez trouvé autant de termes que vous jugerez nécessaire pour votre objet, & vous aurez $y = ax^q + Y + y' + y''$ &c. Les quantités Y , y' , &c. seront toutes d'une forme qu'on pourra exprimer par Bx^r . Si l'on suppose $x = \frac{1}{\infty}$, on réduira l'équation par le quarré analytique dans cette

même supposition, le reste s'achèvera de même.

EXEMPLE I. Soit l'équation $y^3 - xy^2 + axy + bx^2 + ab^2 = 0$, on demande y exprimé par une série d'autant plus convergente que x est plus grand. Faisant $x = \infty$, & appliquant l'équation au quarré algébrique, on la réduit à celle-ci $y^3 - xy^2 + bx^2 = 0$, d'où l'on tire par les directrices $y^3 - xy^2 = 0$, $-xy^2 + bx^2 = 0$. La première en divisant par y^2 & transposant, donne $y = x$; la seconde donne $y = +\sqrt{bx}$ & $y = -\sqrt{bx}$. chaque y promet une série. Pour la première on a $y = x = ax^{\frac{1}{2}}$; donc $y = Y + ax^{\frac{1}{2}}$. Substituant cette valeur à la place de y , ou pour moins d'embarras, substituant $y + ax^{\frac{1}{2}}$, ou $y + x$, au lieu de y dans l'équation donnée, il vient en réduisant & faisant $a + b = c$, il vient, dis-je, $y^3 + ax^{\frac{1}{2}}y^2 + x^2y + axy + cx^2 + ab^2 = 0$ (D), qui dans la supposition de $x = \infty$ devient $y^3 + ax^{\frac{1}{2}}y^2 + x^2y + cx^2 = 0$, dont les racines sont contenues dans les équations $y^3 + 2xy^2 + x^2y = 0$, $x^2y + cx^2 = 0$, que donnent les directrices. La première en divisant par y devient $y^2 + 2xy + x^2 = 0$, ou $(y + x) \times (y + x) = 0$; donc $y = -x$, racine inutile, parce qu'elle détruit le premier terme x de la série; il faut donc employer l'autre équation $x^2y + cx^2 = 0$, qui en transposant & divisant par x^2 donne $y = -c$, second terme de la série. Pour avoir le troisième on substituera $y - c$ à la place de y dans l'équation D que nous venons de traiter, & l'on aura

$$\begin{aligned} & y^3 - 3cy^2 + 3c^2y - c^3 = 0 \\ & + 2xy^2 - 4cxy + 2c^2x \\ & + x^2y - acx \\ & + axy + ab^2. \end{aligned}$$

Cette équation étant appliquée au quarré algébrique, fournit cette équation utile $x^2 y + 2 c^2 x - a c x = 0$; donc divisant par x^2 & transposant, $y = \frac{ac - 2c^2}{x}$, troisieme terme de la série $y =$

$$x - (a+b) - \frac{(a+2b):(a+b)}{x} \text{ \&c. en mettant}$$

$a+b$ à la place de c . On peut de même trouver tant d'autres termes qu'on voudra. Mais il est facile de voir que x étant supposé fort grand, le troisieme terme est fort petit par rapport au second, & celui-ci par rapport au premier, & qu'on peut négliger les termes qui suivent le troisieme.

La seconde racine de l'équation donnée a été trouvée $= +\sqrt{bx}$, qui est le premier terme de la série qui doit représenter la seconde racine y . Ecrivons dans la proposée $y + \sqrt{bx}$ à la place de y & faisant pour abrégér $b = 1$ dans l'équation donnée & dans \sqrt{bx} , on aura l'équation proposée $y^3 - xy^2 + axy + x^2 + a = 0$, dans laquelle substituant $y + x^{\frac{1}{2}}$ au lieu de y & réduisant, l'on a $y^3 + 3y^2 x^{\frac{1}{2}} + 3yx + x^{\frac{3}{2}} - y^3 x - 2yx^{\frac{1}{2}} + axy + ax^{\frac{1}{2}} + a = 0$. Cette équation, mise sur le quarré analytique, donne cette équation utile $x^{\frac{1}{2}} - 2yx^{\frac{1}{2}} + ax^{\frac{1}{2}} = 0$, d'où l'on tire $1 - 2y + a = 0$ & $y = \frac{a}{2} + \frac{1}{2}$, ou en écrivant b à la place de 1 , $y = \frac{a+b}{2}$, second terme de la série, &c. Si l'on suppose le premier terme négatif, on aura la troisieme série $y = -\sqrt{bx} + \frac{a+b}{2}$ &c.

Si dans l'équation proposée on suppose $x = \frac{1}{\infty}$, on trouvera l'équation $y^3 + a b^2 = 0$, qui n'a qu'une racine réelle $y = -\sqrt[3]{(a b^2)}$, les autres racines étant imaginaires; ainsi $-\sqrt[3]{(a b b)}$ sera le premier terme de la série. On trouvera le second en écrivant dans l'équation proposée $y - a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}}$ à la place de y , ce qui donnera une nouvelle équation, que j'appellerai A. Appliquant l'équation A au carré algébrique, on trouvera dans la supposition de $x = \frac{1}{\infty}$, les deux équations suivantes $3 a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{4}{3}} y - a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{4}{3}} x - a^{\frac{4}{3}} b^{\frac{2}{3}} x = 0$, $y^3 - 3 a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}} y^2 + 3 a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{4}{3}} y = 0$. Cette dernière équation divisée par y deviendra du second degré & les racines qu'elle donnera seront finies, tandis que nous cherchons une racine infiniment petite; ainsi elle est inutile. La première étant divisée par $a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}}$ donne $3 b^{\frac{2}{3}} y - b^{\frac{2}{3}} x - a^{\frac{2}{3}} x = 0$; donc $y = \frac{(b^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}) x}{3 b^{\frac{2}{3}}}$; donc en s'en tenant

aux deux premiers termes, $y = -a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}} + \frac{(b^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}) x}{3 b^{\frac{2}{3}}}$

à-peu-près à cause de x fort petit.

EXEMPLE II. Soit l'équation $x^3 + x^2 y + a y^2 - 2 a^2 y + a^3 = 0$, on demande une série qui donne y d'autant plus exactement que x est pris plus petit. Appliquant cette équation au carré algébrique, elle se réduit, dans la supposition de $x = \frac{1}{\infty}$, à cette autre équation $a y^2 - 2 a^2 y + a^3 = 0$, ou en divisant par a , $y^2 - 2 a y + a^2$

$= 0$, ou $(y - a)^2 = 0$; donc elle a une racine double $y = a$, $y = a$; de sorte que le premier terme des deux séries qui doivent donner les valeurs de y est a . Pour trouver les seconds termes de ces séries, je substitue $y = a$ dans l'équation proposée à la place de y , & j'ai $x^3 + x^2y + ax^2 + ay^2 = 0$, qui dans la supposition de x infiniment petit donne, en l'appliquant au quarré algébrique, $ay^2 + ax^2 = 0$, ou $y^2 + x^2 = 0$, ou $y = \pm \sqrt{-x^2}$; donc le second terme de chacune des séries est imaginaire; ainsi les séries sont elles-mêmes imaginaires & leur continuation est inutile.

REMARQUE. Si l'on trouve une équation de cette forme $(y - a)^n = 0$, on aura autant de séries que n contient d'unités, le premier terme de ces séries sera $= a$. Si $n = 1$, a appartiendra à une seule série, dont le premier terme & les suivants seront réels. Si $n = 2$, il peut se faire que le second ou le troisième, &c. terme des deux séries soit imaginaire; il faut donc opérer jusqu'à ce que l'on parvienne au terme où les deux séries se séparent l'une de l'autre, alors on trouvera deux termes, un pour chaque série, qui seront tous les deux réels ou tous les deux imaginaires. Dans le premier cas on peut être sûr que les séries sont réelles. Mais si les séries doivent être les mêmes, les valeurs de y étant les mêmes pour l'une & pour l'autre, il faudra continuer les séries jusqu'à la fin, afin d'être assuré qu'elles ne contiennent aucun terme imaginaire. Si $n = 3$, le premier terme des trois séries sera $= a$ & l'on continuera la série jusqu'à ce qu'on soit arrivé au terme où elle se partage en trois, ce qui ne peut se faire que par l'extraction d'une racine cubique, qui donne ou

trois racines réelles, ou deux imaginaires & une réelle; donc au moins une des trois séries sera réelle. En général il faut opérer jusqu'à ce que la série se fourche en un nombre n de séries. Mais si la série dont le premier terme est donné par l'équation $(y - a)^n = 0$, ne se fourche pas, c'est une marque qu'il y a autant de séries égales & autant de valeurs de y égales, qu'il y a d'unités dans n .

REMARQUE II. Puisque les séries qu'on cherche sont une suite de termes d'autant plus petits qu'ils s'éloignent du premier, en sorte que les ordres de ces termes sont différents, du moins en supposant l'inconnue de la suite infinie ou infiniment petite, il faudra rejeter toutes les valeurs des racines qui donneroient un terme égal, plus grand ou du même ordre que les précédents. On doit rejeter aussi les racines qui donneroient un terme qui détruiroit quelqu'un des précédents. C'est ainsi que dans le premier exemple on a rejeté $-x$ qui détruiroit le premier terme $+x$.

Passons maintenant à la recherche des branches infinies & des asymptotes des courbes. Si l'on prend une partie p de l'abscisse a infiniment petite (fig. 20), nous l'appellerons dx , & une partie m de l'ordonnée, aussi infiniment petite, nous l'appellerons dy & nous ferons le sinus total $= 1$.

45. THÉOR. La tangente de l'angle de la Courbe avec une parallèle à la ligne des abscisses en un point quelconque m est $= \frac{dy}{dx}$, & la tangente de l'angle de

la Courbe avec son ordonnée est $\frac{dx}{dy}$, d'autant plus exactement que les points m & i seront plus proches l'un de l'autre. En effet la portion mi de la Courbe

se confond avec la portion correspondante de la tangente Mm , d'autant plus exactement que pp est plus petit *; or le triangle mio rectangle en o (à cause de io parallèle à ap & de mp perpendiculaire sur l'axe pa : car on suppose l'angle des coordonnées droit), donne, en prenant io pour rayon, $dx \equiv pp : dy \equiv om :: 1 : \text{tang. } mio \equiv \frac{dy}{dx}$; donc 1° . &c. Le même triangle donne $dy :$

$$dx :: 1 : \text{tang. } imo = \frac{dx}{dy}.$$

COROLLAIRE. Donc si $\frac{dy}{dx}$ est $= a$, on aura $dx : dy :: 1 : a$. Si $a = 0$, l'angle mio sera $= 0$, c'est-à-dire, que la Courbe est alors parallèle à la ligne des abscisses : ainsi les branches de l'hyperbole vulgaire sont censées à l'infini parallèles à leurs asymptotes. On fait aussi que la tangente qui passe par l'extrémité du petit axe de l'Ellipse est parallèle au grand axe.

46. PROBLÈME. *Etant donnée l'équation d'une Courbe, trouver pour chaque branche infinie de cette Courbe la valeur de y ou de x par une série dont les termes aillent toujours en diminuant. Pour les branches qui s'étendent à l'infini dans la direction de l'axe des abscisses, supposez $x = \infty$ & cherchez la série que donne y dans cette supposition. Pour les branches qui s'étendent à l'infini*

* Lorsqu'on suppose le point m infiniment proche du point i , l'angle de la Courbe avec l'ordonnée, ou avec la ligne io parallèle à l'axe des x , est censé le même que celui que fait la tangente avec les mêmes lignes.

dans

dans la direction de l'axe des ordonnées, changez dans l'équation y en x & réciproquement, & cherchez ensuite la valeur de y comme pour le cas précédent.

COROLLAIRE. La série ainsi trouvée sera $y = a x^r + b x^s + c x^t + \&c.$ $a, b, c, \&c.$ sont des quantités constantes & les exposants $r, s, \&c.$ doivent aller en diminuant, autrement la série ne seroit pas convergente puisqu'on suppose x au moins fort grand. Si l'on fait $x = \infty$, la série se réduit au premier terme & l'on a $y = a x^r$. Maintenant supposons qu'on augmente y de la quantité infiniment petite dy , & x de la quantité infiniment petite dx , l'on aura $a x^r = a (x + dx)^r = a x^r + a r x^{r-1} dx + \frac{a r (r-1)}{2} x^{r-2} (dx)^2 + \&c.$

$= a x^r + a r x^{r-1} dx$, parce que les termes qui suivent disparaissent devant le second, à cause de dx infiniment petit; donc notre équation deviendra $y + dy = a x^r + a r x^{r-1} dx$, ou $dy = a r x^{r-1} dx$, en effaçant les quantités égales $y, a x^r$; donc $dx : dy :: 1 : a r x^{r-1}$, ce qui fait voir que si r est positif & plus grand que 1, on aura $dx :$

$dy :: 1 : \infty$ & $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\infty} = 0$; c'est-à-dire, que

dans ce cas la Courbe aura une branche qui à l'infini sera parallèle à l'axe des y . Si r est $= 1$, $r - 1$ sera $= 0$ & l'on aura $dx : dy :: 1 : a x^0 = a$; donc la dernière direction de la branche cherchée ne sera ni l'axe des ordonnées, ni celui des abscisses (dans ce dernier cas l'on auroit $\frac{dy}{dx} = 0$), mais une ligne qui partant du point a

fera un angle oblique avec la ligne des abscisses. Si $a = 1$, cet angle sera de 45° : car la tangente

de 45° est égale au rayon. Si r est une fraction positive plus petite que l'unité, $r - 1$ sera un nombre négatif $-p$, & l'on aura $ax^{r-1} = ax^{-p} = \frac{a}{x^p}$, quantité infiniment petite; donc $dx :$

$dy :: 1 : \frac{1}{\infty}$; donc $\frac{dy}{dx} = 0$; donc la dernière direction de la Courbe sera parallèle à l'axe des x , ce qui a lieu aussi si r est un nombre négatif entier ou fractionnaire.

COROLLAIRE II. Soit dp l'ordonnée y de la Courbe mpn (fig. 21), on trouvera la dernière direction de la branche pn par l'équation $y = ax^r + \&c.$ Soit $gd = y' = ax^{r-1}$, on décrira la branche gq par l'équation $y' = ax^{r-1}$, & la dernière direction de cette Courbe sera la même que pour la Courbe pn ; de sorte qu'à l'infini les deux Courbes deviendront parallèles l'une à l'autre. L'intervalle gp entre les deux Courbes sera fini, infiniment grand ou infiniment petit, selon que $bx^r + cx^t$ &c. fera une quantité finie, infiniment grande ou infiniment petite. Si l'on prend deux termes de la série, qu'on suppose $y'' = ax^r + bx^t$ & qu'on écrive la Courbe rs de cette équation, la branche hs s'approchera encore plus de la Courbe pn , de sorte que rs , fq seront les asymptotes curvilignes de la Courbe pn , en supposant qu'à l'infini pg & ph sont infiniment petits. Il n'est pas difficile de voir ce qui arriveroit en construisant la Courbe de l'équation $y''' = ax^r + bx^t + cx^t$.

EXEMPLE I. Soit l'équation $xy - c^2 = 0$. Faisant $x = \infty$, l'on a $y = \frac{c^2}{\infty} = 0$ (car ici on considère 0 comme une quantité infiniment petite),

& la série est composée d'un seul terme. Supposant $x = -\infty$, on a $y = 0$, c'est-à-dire, que la Courbe, qui est évidemment une hyperbole, a deux branches infinies, l'une du côté des abscisses positives, l'autre du côté des négatives; & parce que la même équation donne $x = \frac{c^2}{y}$, il s'ensuit que la Courbe a deux autres branches infinies; dont la dernière direction est parallèle à l'axe des ordonnées: ce sont là les quatre branches de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes.

EXEMPLE II. Soit l'équation $x^4 - x^2 y^2 + a^4 = 0$. Faisant $x = \infty$ & appliquant cette équation au carré algébrique, elle se réduit à $x^4 - x^2 y^2 = 0$. En supposant $y = \infty$, elle se réduit à ces deux $x^4 - x^2 y^2 = 0$, & $-x^2 y^2 + a^4 = 0$, dont la première est la même que celle que donne $x = \infty$. L'équation $x^4 - x^2 y^2 = 0$, donne $y^2 = x^2$, $y = +x$ & $y = -x$: ainsi $+x$ & $-x$ sont les premiers termes des deux séries qui représentent les deux y . Pour trouver le second terme de la première série, on substituera dans l'équation de la Courbe $y + x$ à la place de y , & $y - x$ si l'on veut avoir le second terme de la seconde série. Dans le premier cas l'équation devient $-x^2 y^2 - 2x^3 y + a^4 = 0$, qui par le moyen du carré analytique se réduit à $-2x^3 y + a^4 = 0$, d'où l'on tire $y = \frac{a^4}{2x^3}$, second terme de la première série. En faisant x négatif on a $y = -\frac{a^4}{2x^3}$, second terme de la seconde série. Il est inutile de chercher d'autres termes, parce que ceux-ci sont assez petits; donc les deux séries qui répondent aux deux y sont

$x + \frac{a^4}{x^3} = y$ & $-x - \frac{a^4}{x^3} = y$; la Courbe a donc deux asymptotes , à chacune desquelles répond une branche infinie , soit du côté des x positifs , soit du côté des négatifs. La supposition de $y = \infty$ donne l'équation $x^4 - x^2 y^2 = 0$ & $x = \pm y$. Substituant $x \pm y$ à la place de x dans l'équation proposée , on trouvera facilement que les branches de la Courbe s'étendent à l'infini dans la direction de l'axe des ordonnées , comme dans la direction de l'axe des abscisses. Si l'on néglige le second terme des séries ci-dessus parce qu'il est infiniment petit , on aura $y = x$, $y = -x$; donc les asymptotes rectilignes forment à l'origine des x un angle de 45° avec la ligne des abscisses , & ces asymptotes sont hyperboliques du genre $\frac{1}{\infty}$. L'équation proposée étant du quatrième degré , cherchons les deux autres valeurs de x par l'équation $-x^2 y^2 + a^4 = 0$, ou $xy = \pm \sqrt{a^4} = \pm a^2$, d'où $x = \pm \frac{a^2}{y} = 0 \pm \frac{a^2}{y}$. Il n'est pas nécessaire de chercher

d'autres termes , parce que $\frac{a^2}{y}$ est une quantité infiniment petite ; car y est supposé infini ; donc l'axe des ordonnées est une asymptote à laquelle , du côté des y positifs & négatifs répondent deux branches infinies.

REMARQUE I. Les séries qui contiennent des quantités imaginaires , indiquent des branches imaginaires.

REMARQUE II. Nous avons supposé l'angle des coordonnées droit , parce qu'il est toujours possible de rapporter la Courbe à un axe tel que cet angle soit droit.

Du retour des suites.

On appelle *retour des suites* la méthode qu'on suit lorsqu'après avoir trouvé dans une équation à deux inconnues la valeur de l'une des inconnues x , par exemple, par une suite qui contient dans ses termes les puissances de l'autre inconnue y , on cherche la valeur de y par une suite dont les termes contiennent les puissances de x .

47. THÉORÈME. Si $x = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + \&c.$, on aura $y = \frac{x}{a} - \frac{bx^2}{a^3} + \frac{(2b^2 - ac) \times x^3}{a^5} + \frac{(5abc - 5b^3 - aad) \times x^4}{a^7} +$

$\&c.$ à l'infini. Pour le faire voir, supposons $y = hx + ix^2 + kx^3 + lx^4 + \&c.$ * on aura $y^2 = h^2x^2 + 2hix^3 + iix^4 + \&c.$

$y^3 = h^3x^3 + 3h^2ix^4 + \&c.$

$y^4 = h^4x^4 + \&c.$

$\&c. = \&c.$

Substituant ces valeurs de $y, y^2, \&c.$ dans la valeur de x , on aura

$x = ahx + aix^2 + akx^3 + alx^4 + \&c.$
 $+ bh^2x^2 + 2bhix^3 + bi^2x^4 + \&c.$
 $+ ch^3x^3 + 3ch^2ix^4 + \&c.$
 $+ dh^4x^4 + \&c.$

Afin que cette équation ait lieu, quelle que soit la

* Cette supposition est permise, parce que les coefficients $h, i, \&c.$ étant indéterminés, peuvent être supposés tels que notre équation en résulte.

valeur de x , il faut qu'on ait $x = ahx^{**}$ & que les coefficients des puissances $x^2, x^3, \&c.$ soient $= 0$; donc premièrement $x = ahx$, ou en divisant par x , $1 = ah$, & $h = \frac{1}{a}$. En second lieu on aura $ax^2 + bh^2x^2 = 0$, d'où, en divisant par ax^2 , substituant la valeur de h^2 & transposant, on tire $i = -\frac{b}{a^3}$. En troisième lieu l'on a $akx^3 + 2bhi x^3 + ch^3x^3 = 0$, d'où l'on tire, en divisant par ax^3 , $k = \frac{-2bhi - ch^3}{a} = \frac{2b^2 - ac}{a^3}$, en substituant les valeurs de i & de h & réduisant les deux termes au même dénominateur. En quatrième lieu on a l'équation $al + bi^2 + 2bhk + 3ch^2i + dh^4 = 0$, d'où l'on tire (après avoir substitué les valeurs de h, k, i) $l = \frac{5abc - 5b^3 - a^2d}{a^7}$; il est facile de voir comment l'on pourroit continuer. Donc si $x = ay + by^3 + cy^3 + dy^4 + \&c.$ on aura $y = \frac{x}{a} - \frac{bx^2}{a^3} + \frac{(2b^2 - ac)x^3}{a^5} + \frac{(5abc - 5b^3 - a^2d)x^4}{a^7} + \&c.$ à l'infini.

COROLLAIRE. Donc étant donnée la série $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \&c. = p$, logarithme hyper-

** Car faisons le coefficient ah de $x = A$, celui de $x^2 = B$, celui de $x^3 = C$, celui de $x^4 = D$, &c. on aura $x = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4$ &c. Divisant par x il vient $1 = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$ &c. Si on suppose $x = 0$, cette équation devient $1 = A$; donc $Bx + Cx^2 + Dx^3$ &c. $= 0$, ou $Bx = -Cx^2 - Dx^3 - \&c.$ ou divisant par x , $B = -Cx - Dx^2 - \&c. = 0$, en supposant $x = 0$; donc $B = 0$, en continuant de même on trouvera $C = 0$, $D = 0$, &c.

bolique du nombre $1+x$ (voy. les Sect. Con. n° 80), on peut trouver ce nombre exprimé par des puissances de p & par des constantes. Soit $x = hp + ip^2 + kp^3 + lp^4 + \&c.$ faisant attention qu'ici $a=1$, $b=-\frac{1}{2}$, $c=\frac{1}{3}$, $d=-\frac{1}{4}$, &c. on a $h=1$, $i=\frac{1}{2}$, $k=\frac{1}{2.3}$, $l=\frac{1}{2.3.4}$ &c.; donc $x = p + \frac{p^2}{2} + \frac{p^3}{2.3} + \frac{p^4}{2.3.4} \&c.$ On voit assez la loi de la suite dont les termes suivants sont $\frac{p^5}{2.3.4.5}$, $\frac{p^6}{2.3.4.5.6}$ &c.

donc le nombre cherché sera $1+x = 1 + p + \frac{p^2}{2} + \frac{p^3}{2.3} + \frac{p^4}{2.3.4} + \frac{p^5}{2.3.4.5} \&c.$ Si l'on suppose $p=1$, on aura le nombre e , dont le logarithme hyperbolique est $=1$. On aura donc $e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \&c.$ réduisant ces termes en fraction décimale & faisant l'addition, on trouvera $e = 2.7182818$ en se bornant à 7 décimales. Ce nombre se rencontre souvent dans les Calculs.

REMARQUE I. On peut exprimer un nombre par son logarithme de cette autre manière. Soit $l.(1+x) = p$, l marque ici le logarithme hyperbolique, si on multiplie p par $1 = l.e$, c'est-à-dire, par le logarithme hyperbolique 1 du nombre e , on aura $l.(1+x) = p.l.e$; or $p.l.e = l.e^p$ *; donc $l.(1+x) = l.e^p$ & par conséquent les nombres auxquels ces logarithmes appartiennent sont égaux, c'est-à-dire, que $1+x = e^p$; or nous venons de voir que $1+x$

* Parce que le logarithme de 9, carré de 3, est le double du logarithme de la racine 3, le logarithme du cube de 3 est le triple du logarithme de 3. Et en général le logarithme de e^p est $= p.l.e$. Tout cela suit de ce que nous avons dit sur les logarithmes dans l'algèbre.

$$= 1 + p + \frac{p^2}{2} + \frac{p^3}{2 \cdot 3} + \&c. ; \text{ donc } e^x = 1 + p + \frac{p^2}{2} + \frac{p^3}{2 \cdot 3} \&c. \text{ puisque } p = l. (1 + x) = l.n ,$$

faisant $1 + x = n$, on a $n = 1 + l.n + \frac{(l.n)^2}{2} + \frac{(l.n)^3}{2 \cdot 3} \&c.$

REMARQUE II. Pour trouver la racine x d'une

série (A) ; $x - \frac{x^2}{5} + 4x^3 \&c. = y^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{4}{3}} + y^2$
 en puissances de y & constantes , je cherche le plus grand commun diviseur des exposants de y , pour cela je réduis $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, 2$ en fractions de même dénominateur & j'ai $\frac{1}{6}, \frac{8}{6}, \frac{12}{6}$ dont le plus grand commun diviseur est $\frac{1}{6}$; je prends $\frac{1}{6}$ pour la différence des exposants de la série cherchée (ce qu'il faut toujours faire en pareil cas), & je suppose ensuite $x = ay^{\frac{1}{6}} + by^{\frac{4}{6}} + cy^{\frac{7}{6}} + dy^{\frac{10}{6}} + \&c. ;$ donc j'ai

$$\left. \begin{aligned} x &= ay^{\frac{1}{6}} + by^{\frac{4}{6}} + cy^{\frac{7}{6}} + dy^{\frac{10}{6}} + \&c. \dots \\ - \frac{x^2}{5} &= - \frac{a^2 y^{\frac{1}{3}}}{5} - \frac{2 a b y^{\frac{5}{6}}}{5} - \&c. \\ 4 x^3 &= 4 a^3 y \&c. \end{aligned} \right\} = y^{\frac{1}{6}} + y^{\frac{4}{6}} + y^{\frac{13}{6}}$$

J'égalé ensuite les termes qui contiennent la même puissance de y , ce qui donne $ay^{\frac{1}{6}} = y^{\frac{1}{6}}$
 d'où l'on tire $1 = a$. En second lieu j'ai $by^{\frac{4}{6}} =$

$0 \times y^4$, parce que le second membre de l'équation proposée ne contient aucun terme dans lequel se trouve y^4 ; donc $b = 0$. Je trouve de même $c = 0$, $d - \frac{a^2}{5} = 0$. De cette dernière équation je tire $d = \frac{a^2}{5} = \frac{1}{5}$ à cause de $a = 1$; de sorte que les

termes de la série qui doit donner x seront $y^{\frac{1}{2}} + 0 + 0 + \frac{y^{\frac{5}{2}}}{5} \&c. = x$. Si dans le second membre de l'équation A, il y avoit un terme constant $= B$, on auroit supposé ce terme $= B y^0$, & $x = B y^0 + B' y^{\frac{1}{2}} + B'' y^{\frac{3}{2}} + a y^{\frac{5}{2}} + b y^{\frac{7}{2}} + \&c.$ en prenant toujours les exposants en progression arithmétique, & faisant la différence de ces exposants égale au plus grand diviseur commun des exposants qui ne sont pas 0. En général on prend pour premier terme celui où y a le plus petit exposant. Ce que nous venons de dire a lieu soit que la série qui contient x soit terminée ou non.

Par exemple, si l'on demandoit la valeur de x dans l'équation $x^2 + y^2 - r^2 = 0$, en y & constantes, on feroit $x = g + h y^2 + i y^4 + \&c.$ parce que n'y ayant point de termes dans l'équation où y & x soient au premier degré, y ne doit pas se trouver dans la série; j'aurai donc

$$x^2 = g^2 + 2ghy^2 + h^2y^4 + 2giy^4 \&c.$$

$$y^2 = \quad \quad \quad + y^2$$

$$-r^2 = -r^2$$

Supposant le premier & le second membre égaux à 0, & faisant = 0 tous les termes où y a le même exposant, en se souvenant que $g^2 = g^2 y^0$, $r^2 = r^2 y^0$, on aura $g^2 = r^2$ & $g = r$; l'on aura en second lieu $2ghy^2 + y^3 = 0$, ou $2hg + 1 = 0$, $2gh = -1$, $h = -\frac{1}{2g} = -\frac{1}{2r}$. De plus on a $h^2 + 2gi = 0$, d'où, en substituant les valeurs de g & de h , on tire $i = -\frac{1}{8r^3}$, & ainsi de suite; de sorte qu'on aura $x = r - \frac{y^2}{2r} - \frac{y^4}{8r^3}$ &c. Si la nature du Problème permet de supposer $y = 3$, par exemple, on aura $x = r - \frac{9}{2r} - \frac{81}{8r^3}$ &c.

REMARQUE III. Afin que ces sortes de séries soient utiles, il faut que l'inconnue qui se trouve dans leurs termes soit assez petite pour que les séries convergent. Si dans le dernier exemple r est $> y$, la série convergera. Mais si r étoit $< y$, dans ce cas on chercheroit une série dont les termes fussent affectés des puissances de r au numérateur, en faisant $x = g + hr^2 + ir^4$ &c. En général les séries seront d'autant plus utiles qu'elles convergeront plus rapidement. Si les x & les y se trouvoient multipliés l'un par l'autre, en sorte qu'on eût $y^3 x^2 - 5x^3 y + 10xy = 0$, dans ces sortes de cas on pourroit trouver les séries, en appliquant l'équation au carré analytique, & supposant une inconnue infiniment petite (c'est celle qui doit entrer dans la série), ainsi qu'on l'a vu ci-dessus. Mais si l'inconnue qui doit affecter la série étoit supposée fort grande, il faudroit, par le moyen du carré algébrique, chercher une série dans laquelle les

exposans de cette inconnue allassent en diminuant, ce qui se feroit en appliquant l'équation (que nous supposons ne contenir qu'un nombre fini de termes) au quarré analytique & regardant cette inconnue comme infinie; mais il est temps de revenir aux Courbes.

Des diametres & du centre des Courbes.

48. Toutes les Sections Coniques ont au moins un *diametre absolu* (c'est une ligne perpendiculaire à ses ordonnées, & qui divise la Courbe en parties égales & semblables) : L'Ellipse en a deux, mais le cercle en a une infinité. Pour trouver les Courbes qui sont dans le même cas, supposons l'espace divisé en quatre parties par les lignes ab , Ff (fig. 22) qui se coupent perpendiculairement en c , & que les co-ordonnées soient perpendiculaires l'une à l'autre. En prenant les x & les y positifs, l'on aura la portion de la Courbe située dans l'angle Fcb ou dans la région q . Supposant x positif & y négatif, on aura la portion de la Courbe située dans la région r . Prenant y positif & x négatif, on a la portion de la Courbe de la région s ; & enfin supposant les x négatifs aussi-bien que les y , on a la portion de la Courbe située dans la région t . Les portions situées en q & r seront égales & semblables, si l'équation est telle qu'elle reste la même en mettant $-y$ à la place de y ; c'est-à-dire, si l'équation ne contient que des puissances paires, de y . Mais les portions q & r pourront être égales sans être semblables; si l'angle des co-ordonnées est oblique. Ce que nous venons de dire pour les portions q & r a également lieu dans le même cas pour les portions s & t qui répondent aux x négatifs; donc toutes les Courbes représentées par l'équation $a + bx + cx^2 + dy^2 + ex^3 + fxy^2 + gx^4 + hx^2y^2 + iy^4$ &c. $= 0$ sont dans ce

cas; c'est-à-dire, que ces Courbes ont un diamètre ab que nous appellons *absolu*, parce que nous supposons que l'angle des co-ordonnées FcP est droit.

Si l'équation de la Courbe est telle qu'en changeant x en $-x$ & y en $-y$, elle reste la même, comme l'équation $0 = a + by^2 + cy^2x^2 + dx^4y^2 + ey^4 + fx^4 + gx^6 + hy^6$ &c. qui ne contient que des puissances paires de x & de y , l'on aura toujours $PM = PN$, & prenant $cp = CP$, on aura $pm = pn = PM = Pm$; c'est-à-dire, qu'en prenant des abscisses négatives égales aux positives, les ordonnées positives & négatives seront toujours égales; il est visible aussi qu'en prenant Ff pour l'axe des abscisses, on aura toujours $VM = Vm$, $un = uN = VM$; donc en supposant l'angle des co-ordonnées droit, les lignes ab , Ff seront deux diamètres absolus, & deux diamètres simples si cet angle n'est pas droit*.

COROLLAIRE. Donc il n'y a que les lignes d'un ordre pair, deuxième, quatrième, sixième, &c. ordre qui puissent avoir deux diamètres absolus.

49. Venons au centre des Courbes. Le centre c d'une Courbe est un point situé sur le plan de la Courbe, auquel si d'un point quelconque M de la Courbe on mène une ligne droite Mc , en prenant le prolongement $cn = cM$, le point n sera sur la Courbe. De-là il suit qu'en prenant $cp = cp$, les ordonnées np , MP seront égales, quel que soit l'angle des co-ordonnées; parce que les triangles Mpc , cnp seront toujours semblables & égaux; donc l'équation de la Courbe doit être telle qu'en changeant x en $-x$ & y en $-y$, elle

* Les diamètres, dont il s'agit ici, sont tels que les abscisses de l'un sont parallèles & égales aux ordonnées correspondantes de l'autre.

reste la même ; or toute équation de degré pair ou impair , dans laquelle tous les termes de rang pair manquent , est dans ce cas ; donc toute Courbe représentée par une telle équation aura un centre ; donc la Courbe de l'équation $ay^3 + cy = 0$ a un

$$+bx^3 + dx$$

centre : car substituant $-y$ & $-x$ au lieu de $+y$ & $+x$ l'on a $-ay^3 - cy = 0$, qui n'est

$$-bx^3 - dx$$

pas différente de la première. En effet soit $ay^3 + bx^3 + cy + dx = p = 0$, l'on aura $-ay^3 - bx^3 - cy - dx = -p = 0$; or de ce que $+p = 0$, on déduit aisément $-p = 0$; donc , &c.

50. PROBLÈME. *Etant donnée l'équation d'une Courbe , en trouver le centre.* Soit n l'origine , nN l'axe des x & mN l'angle des coordonnées , en sorte que les ordonnées soient parallèles à nm . Dans l'équation de la Courbe substituez $m+x$ à la place de x & $n+y$ au lieu de y . Si donc on suppose $nu = pc = m$, & $pn = cu = n$, l'origine des abscisses sera transportée en c , l'angle des coordonnées restant le même. On déterminera m & n par cette condition , que tous les termes de rang pair doivent s'évanouir dans l'équation. Si cela a lieu , la Courbe a un centre. Mais dans le cas contraire elle n'en a aucun.

EXEMPLE I. Soit la Courbe de l'équation $ay^2 - abx + bx^2 = 0$. Substituant dans cette équation $m+x$ à la place de x , & $n+y$ au lieu de y , il vient $ay^2 + 2any + an^2 = 0$

$$+bx^2 + 2bmx + bm^2$$

$$-abx - abm$$

supposant $2an = 0$, $2bm - ab = 0$, la Courbe aura un centre ; car dans ce cas le second terme

disparoîtra. De l'équation $2an = 0$, on tire $n = 0$; la seconde équation donne $2m = a$, ou $m = \frac{a}{2}$.

Ces équations font voir que l'axe des abscisses de la première équation $ay^2 - abx + bx^2 = 0$ passe par le centre de la Courbe & que sa distance à l'origine des x est $= \frac{a}{2}$. Substituant les valeurs de

m & n que nous venons de trouver, il vient $ay^2 + bx^2 - \frac{1}{2}ba^2 = 0$, dans cette dernière équation l'axe des abscisses passe par le centre qui est l'origine des x .

EXEMPLE II. Soit l'équation $xy - a^2 = 0$, qui appartient à l'hyperbole rapportée aux asymptotes. L'origine des abscisses est le centre de la Courbe : car cette équation ne change pas en faisant x & y négatifs. Et en général si dans l'équation $x^m y^n - a^{m+n} = 0$, la somme des exposants $m + n$ est un nombre pair, le centre des hyperboles qui sont représentées par cette équation, fera l'origine des abscisses.

Si l'on a $x^2 y - a^3 = 0$, en substituant $m + x$ à la place de x & $n + y$ au lieu de y , il vient

$$\begin{aligned} x^2 y + 2mxy + m^2 y + m^2 n &= 0 \\ + nx^2 + 2mnx - a^3. \end{aligned}$$

Pour que la Courbe ait un centre, supposons $2m = 0$, $n = 0$, $m^2 n - a^3 = 0$; c'est-à-dire, $m = 0$, $n = 0$ & $a^3 = 0$, ce qui donne $x^2 y = 0$; or l'on ne peut supposer $a^3 = 0$; donc la Courbe de l'équation n'a point de centre.

De même la parabole ordinaire, qu'on peut représenter par l'équation $y^2 - ax = 0$, n'a point de centre. En effet, par les substitutions l'on trouve l'équation $y^2 + 2ny + n^2 = 0$, d'où l'on

$$= ax = am$$

tire $n = 0$ & $a = 0$, ce qui ne peut être ; & en général les paraboles représentées par l'équation générale $y^{2n} - a^{2n-1}x = 0$ manquent de centre avec plusieurs autres. Mais les paraboles représentées par l'équation générale $y^{2n+1} - a^{2n}x = 0$, ont toutes un centre, ce qu'on voit facilement par l'équation, qui est telle qu'elle ne change pas en substituant $-x$ à la place de x & $-y$ au lieu de y . Il n'est pas difficile de voir que le centre de ces Courbes tombe sur l'origine des abscisses.

Des Tangentes & de la courbure des Courbes.

§ 1. Une *Tangente* est une ligne droite, qu'on peut regarder comme ayant deux points infiniment proches, communs avec la Courbe *. Soit la ligne courbe acp (fig. 23), dont l'équation entre les abscisses $ab(p)$ & les ordonnées $bc(q)$ est donnée, p & q sont déterminés pour chaque point c de la Courbe ; ainsi l'on doit les regarder comme constants quand il s'agit de chercher la tangente au point c . Ayant tiré une autre ordonnée dp fort proche de bc & la ligne cf parallèle à l'axe des abscisses ; soit $bd = cf = x$, $pf = y$. Substituant $p + x$ à la place de p , & $q + y$ à la

* Si l'on conçoit que la Tangente gc (fig. 23) se meut parallèlement à elle-même en allant vers la Courbe, si peu considérable que soit son mouvement, elle rencontrera la Courbe au moins en deux points, & de plus les points de rencontre seront d'abord extrêmement proches. C'est dans ce sens qu'il faut entendre ce que nous venons de dire : savoir que la Tangente a au moins deux points infiniment proches, communs avec la Courbe lorsqu'on veut que ces points soient réellement différents l'un de l'autre.

place de y & de l'équation qui en résultera, retranchez l'équation de la Courbe entre p & q , il restera l'équation entre x & y qui ne contiendra aucun terme constant & qui sera de cette forme $ax + by + cx^2 + dxy + ey^2 + \&c. = 0$. Les coefficients sont des fonctions de constantes (on regarde p & q comme constants); or il est visible que dans cette nouvelle équation cf est la ligne, c l'origine des abscisses & que les ordonnées sont fp . Si on suppose x infiniment petit, $pf = y$ le sera aussi, & alors tous les termes qui suivent les deux premiers disparaîtront devant ceux-là; ainsi l'équation deviendra $ax + by = 0$, * équation qui appartient à la ligne droite cp , passant par le point c . Donc cette ligne sera tangente si p & c sont infiniment proches.

Ayant prolongé pc jusqu'à la rencontre de l'axe en g , les triangles semblables pcf , cbg donnent $pf = y : cf = x :: cb : bg$; or l'équation $ax + by = 0$, ou $ax = -by$, donne $y : x :: a : -b$; donc $a : -b :: cb : bg = -\frac{b \times cb}{a}$, c'est-à-dire, que la sous-tangente $bg = z$ est $= \frac{-b \times cb}{a}$. Dès qu'on connoîtra le point g &

* Cette équation sera d'autant plus exacte que x & y seront plus petits; mais elle sera rigoureuse, si x & y sont infiniment petits ou inassignables. En effet, l'erreur quequelqu'un prétendrait en résulter étant inassignable (si cependant on peut dire qu'il y a effectivement une erreur; car on peut faire voir par les principes du Calcul différentiel qu'il n'y en a aucune), doit être regardée comme nulle. Qui pourroit en effet distinguer une erreur inassignable d'une erreur nulle, ou $= 0$?
le

de point c , la Tangente cg sera déterminée. Il suffit donc de connoître la sous-tangente bg .

52. PROBLÈME. Déterminer la sous-tangente d'une Courbe algébrique quelconque. Dans l'équation de la Courbe entre les coordonnées p & q , substituez $p + x$ au lieu de p , & $q + y$ au lieu de q . De l'équation qui en résultera retranchez l'équation entre p & q , ordonnez ce qui restera, de sorte que les quantités, dont l'exposant sera 1, constituent le premier terme; celles dont l'exposant sera 2, le second terme, & ainsi de suite. Égalez le premier terme à 0, & de cette équation tirez le rapport entre y & x , qui est tel que $y : x :: a : -b$; la sous-tangente bg sera $t = -\frac{b \times c b}{a} = -\frac{b \cdot q}{a}$.

EXEMPLE I. Soit la parabole ordinaire, dont l'équation est $c \cdot p = q^2$ *. Faisant les substitutions, il vient $c(p + x) = (q + y)^2$; retranchant la première équation de la seconde, l'on a $c x = 2 q y + y^2$. Négligent y^2 , on a $c x = 2 q y$, d'où l'on tire $y : x :: c : 2 q$; donc $2 q = -\frac{b}{a}$ (parce que l'on a ici $c = a$) & $b q = t = -\frac{b \cdot q}{a} = -\frac{2 q^2}{c}$; or l'équation $c \cdot p = q^2$ donne $\frac{q^2}{c} = p$; donc $t = 2 p$, c'est-à-dire, que la sous-

* C'est la même équation que nous avons trouvée dans les Sections Coniques, avec cette différence seulement que le parametre que nous avons appelé p est ici $= c$, l'abscisse que nous avons faite $= x$ est ici $= p$, & l'ordonnée que nous avons nommée y , est ici $= q$.

tangente de la parabole est double de l'abscisse , ce que nous savons d'ailleurs .

EXEMPLE II. Soit la ligne du troisieme ordre , dont l'équation est $xy^2 = c^2x + c^2y$. Changez dans cette équation x en p & y en q pour avoir $pq^2 = c^2p + c^2q$ (D). Substituant dans cette dernière équation $p + x$ au lieu de p ; $q + y$ à la place de q , de l'équation qui en résultera retranchez l'équation D , rejetant tous les termes qui sont au-dessus du premier degré , vous aurez $(q^2 - c^2)x = (c^2 - 2pq)y$; donc $y : x :: q^2 - c^2 : c^2 - 2pq :: q : t = \frac{c^2q - 2pq^2}{q^2 - c^2}$.

Revenons à l'équation générale par laquelle nous avons déterminé la sous-tangente , savoir $ax + by = 0$. Si a est $= 0$, y sera $= 0$; donc la Tangente coïncidera avec cf & sera parallele à la ligne des abscisses. Si $b = 0$, x sera $= 0$; donc la tangente se confondra avec pf & sera parallele à l'axe des ordonnées. Toutes les fois que l'ordonnée bc devient plus grande ou plus petite que les ordonnées voisines , situées à la droite & à la gauche du point c , il est nécessaire que la Tangente devienne parallele aux abscisses , dans le premier cas l'ordonnée est appelée un *maximum* , & un *minimum* dans le second cas. Cela arrive en m & m^* .

* Car puisque les ordonnées de la droite & de la gauche du point m sont plus petites ou plus grandes que l'ordonnée qui répond au point m , la Courbe au point m ne s'approche ni ne s'éloigne de l'axe ; donc la Tangente au point m réunit deux points également éloignés de l'axe ; donc , &c. Si la Tangente nN est parallele aux ordonnées , il peut se faire que l'ordonnée nN (qui dans ce cas devient tangente) soit plus petite que ses voisines , il peut se faire aussi que l'ordonnée nN soit un *maximum* , comme la

Mais on ne peut pas dire réciproquement que la Tangente étant parallèle à la ligne des abscisses ou à celle des ordonnées comme il arrive en N, il en résulte un *maximum* ou un *minimum* pour l'ordonnée. Cependant si on fait d'ailleurs que la Courbe a une ordonnée plus grande ou plus petite, pour la déterminer on fera $a = 0$, ou $b = 0$. Soit l'équation de la Courbe $2c^2y = 2x^3 + cx^2 + c^2x$ qu'on fait avoir deux ordonnées plus grandes, l'une positive, l'autre négative. Pour les trouver, j'écris p à la place de x , & q à la place de y & j'ai $2c^2q = 2p^3 + cp^2 + c^2p$ (D). Je substitue dans cette équation $p + x$ au lieu de p & $q + y$ à la place de q . De l'équation qui en résulte, retranchant l'équation D, j'ai en négligeant les termes qui sont au-dessus du premier degré, $2c^2y = (6p^2 + 2cp - c^2) \times x$; ainsi en comparant cette équation à l'équation générale $ax + by = 0$, ou $by = -ax$, j'ai $b = 2c^2$, quantité constante qu'on ne peut pas supposer $= 0$. J'ai de plus $6p^2 + 2cp - c^2 = -a$, & faisant $a = 0$, il vient $6p^2 + 2cp - c^2 = 0$, ou $p^2 + \frac{cp}{3} = \frac{c^2}{6}$. Complétant le premier mem-

figure le fait assez voir. Mais de ce que la Tangente mn (fig. 23, A) est parallèle à l'axe, il ne s'ensuit pas que l'ordonnée soit un *maximum* ou un *minimum*, parce que la Courbe peut avoir un point de flexion en m . On appelle point de flexion le point dans lequel une Courbe de concavé devient convexe ou réciproquement; & il est facile de voir que la Tangente mn peut être parallèle aux abscisses, sans que des ordonnées voisines dp , N soient à la fois plus grandes ou plus petites que Mm ; donc dans ce cas Mm ne peut être un *maximum* ni un *minimum*. Si la Courbe se fléchit en M (fig. 23), de manière que la tangente devienne parallèle à N , l'ordonnée TM ne sera ni un *maximum* ni un *minimum*.

bre, j'ai $p^2 + \frac{c}{3}p + \frac{c^2}{36} = \frac{c^2}{6} + \frac{c^2}{36} = \frac{7c^2}{36}$ & $p + \frac{c}{6} = \pm \sqrt{\frac{7c^2}{36}}$, ou $p = \frac{-c \pm c\sqrt{7}}{6}$. Ainsi les

ordonnées qui répondent aux deux abscisses désignées par cette équation, sont les deux *maxima* cherchés *. Si l'une & l'autre constante a & b est $= 0$, on ne peut pas négliger les termes qui suivent $ax + bx$. Mais on doit faire le terme suivant

$$cx^2 + dxy + ey^2 = 0, \text{ ou } x^2 + \frac{d}{c}xy + \frac{e}{c}y^2$$

$= 0$, les racines de cette équation sont imaginaires si $dd < 4ce$, excepté le cas où x & y seroient $= 0$: car alors toute l'équation seroit divisible par $x = 0$, & $y = c$. Dans ce cas le point appartient véritablement à la Courbe, mais il en est entièrement séparé *. On l'appelle *point conjugué*, & relativement à ce point il n'y a pas de Tangente: car une Tangente doit avoir au moins deux points infiniment proches communs avec la Courbe.

Pour se former une idée nette de ces sortes de points, soit la Courbe désignée par $y = b + \sqrt{((b-x)(c-x)(a-x)(d+x) \&c.)}$, il est visible qu'en faisant $x = ap = b$ (fig. 24), la quantité qui est sous le signe devient $= 0$, à cause de $b - x = 0$; donc on aura $y = b = pn$. Le point n appartiendra donc à la partie de la Courbe qui se trouvera en deçà de q . Si on suppose qu'en fai-

* Nous traiterons la question de *maximis* & *minimis* dans le Calcul différentiel.

** Parce que soit qu'on suppose les x positifs ou négatifs, les ordonnées voisines deviennent imaginaires; donc ce point est séparé du reste de la Courbe.

fant $x > b$, de manière cependant que x soit plus petit que $aq = c$, la quantité qui est sous le signe devienne négative, les ordonnées qui se trouvent au-delà de q seront imaginaires; mais elles seront réelles entre p & q . De même si en faisant $x > ar$, mais en supposant aussi $x < as$, la quantité qui est sous le signe devient négative, les ordonnées situées entre r & s , seront réelles, quoique celles qui sont situées entre q & r & au-delà de s puissent être imaginaires. De plus à cause du signe \pm du radical, à chaque point u situé entre r & s répondront deux ordonnées uk, ui . Si le point r tombe sur le point s & le point u , la figure N qu'on appelle *ovale conjuguée*, deviendra un seul point, les ordonnées uk, ui étant terminées à un même point N . Ainsi l'on aura un point conjugué N (fig. 25) séparé du reste de la Courbe. Il n'est pas difficile de voir que si p & q se confondoient, il en naîtroit un autre point conjugué n (fig. 25). Ces deux points auront des ordonnées réelles pN, pn . Mais si ces points étoient infiniment proches, alors deux ovales conjuguées se confondroient en un seul point qui seroit censé répondre à quatre ordonnées confondues en une; ainsi ce point seroit quadruple*. Si une ovale b (fig. 24) touche la Courbe en un point b , il en résulte une feuille bxt & un nœud en b . Le point b est censé réunir deux points h & g de la Courbe, qui se confondent en un seul

* Lorsque l'ovale N (fig. 24) se réduit en un point, les ordonnées ui, uk aboutissent au même point, qu'on appelle alors *point conjugué*, qui est évidemment un *point double*; donc si deux ovales tombent l'une sur l'autre, & que toutes les deux se réduisent à un seul point, ce point sera quadruple.

point b , lorsque fh devient $= fg = fb$. Si l'ovale b se réduit en un seul point d (fig. 25), il en résultera une points d , qu'on appelle *point de rebroussement* (parce que la Courbe après avoir avancé de M vers d , rebrousse son chemin vers T), & qui est nécessairement au moins un point double. Si par le point b (fig. 24) ou par le point d (fig. 25) il passe une, deux, &c. branches de plus, il est visible que ces points seront au moins triples, quadruples, &c.

Revenons aux Tangentes des Courbes. Selon ce que nous avons dit ci-dessus, lorsque l'équation $cx^2 + dxy + ey^2 = 0$, n'est pas résoluble en facteurs réels, la Courbe a nécessairement un point conjugué. Lorsque $dd > 4ce$, l'équation est résoluble en deux facteurs de cette forme $ax + by = 0$, $Ax + By = 0$; donc puisque l'un & l'autre facteur détermine une Tangente, il est nécessaire qu'au même point c (fig. 26) aboutissent deux Tangentes, ce qui ne peut se faire à moins que deux branches de la même Courbe ne passent par le même point c . La Tangente de la branche ac est cg , celle de la branche dc étant ce , l'une de ces branches est déterminée par le premier facteur, l'autre par le second facteur. Si les deux facteurs sont égaux, c'est-à-dire, si $dd = 4ce$, les Tangentes ce , cg se confondront; donc les deux branches auront la même direction en c , de plus elles se toucheront en ce point. Dans tous ces cas le point c est un point double, car il est censé réunir deux points de la Courbe.

53. COROLLAIRE. L'équation $cx^2 + dxy + ey^2 = 0$, donne toujours un point double. Ce point est conjugué lorsque les facteurs de cette équation sont imaginaires. Le point c est l'intersection

des deux branches de la même Courbe, lorsque les facteurs de cette équation sont réels & inégaux. Ce point est commun à deux branches qui se touchent, lorsque les deux facteurs de cette équation sont égaux.

54. Si non-seulement a & b , mais encore c , d , e étoient $= 0$, dans ce cas l'équation subsisteroit entre les quantités du troisième degré, & l'on auroit $fx^3 + gx^2y + hxy^2 + iy^3 = 0$. Si cette équation a deux racines imaginaires & une réelle, il passera par le point c une seule branche de la Courbe, dont la Tangente sera déterminée par le facteur réel de l'équation du troisième degré. Il y aura de plus une ovale conjuguée réduite en un point conjugué, confondu avec le point c . Si les trois facteurs de l'équation sont réels, il passera trois branches de la Courbe par le point c . Ces branches se couperont si les trois facteurs sont inégaux, deux se toucheront si deux facteurs sont égaux; mais toutes les trois se toucheront si les trois facteurs sont égaux. Dans tous ces cas le point c sera triple, & la droite qui passera par c sera censée réunir trois points de la Courbe.

Si f , g , h , i étoient $= 0$, l'équation auroit lieu entre les quantités du quatrième degré, & l'on auroit $kx^4 + mx^3y + nx^2y^2 + px^2y^3 + qy^4 = 0$. Cette équation (par la nature des équations du quatrième degré, voyez l'Algebre) a tous ses facteurs imaginaires, ou tous réels, ou deux réels & deux imaginaires. Dans le premier cas regardant l'équation comme composée de deux facteurs réels du second degré, dont les facteurs sont imaginaires, chacun de ces facteurs du second degré donnera un point conjugué; donc le point c sera

un point conjugué double : dans le second cas il passera par le point c quatre branches de la même Courbe , qui se couperont si ces facteurs sont inégaux , elles se toucheront s'ils sont égaux , deux ou trois se toucheront si deux ou trois facteurs sont égaux : dans le troisième cas deux branches se couperont ou se toucheront en c , selon que les facteurs réels seront inégaux ou égaux , & de plus le point c réunira un point conjugué ; de sorte qu'une droite quelconque qui passera par c sera censée réunir quatre points de la Courbe. On peut voir maintenant ce qui arriveroit s'il falloit prendre les quantités de 5 , 6 , 7 , &c. dimensions. Passons à la courbure de lignes algébriques.

Deux arcs infiniment petits am , an (fig. 27) de deux Courbes qui ont une tangente commune en a , sont censés avoir la même courbure , lorsque la différence des ordonnées extrêmes pn , pm , aussi bien que des ordonnées rP , qP comprises entre les extrêmes & le point a , sera moindre qu'aucune quantité donnée. Dans ce cas la Courbe intérieure amb sera appelée la *Courbe osculatrice* de la Courbe and au point a .

55. THÉORÈME I. Une parabole d'un parametre $= 2a$, à pour cercle osculateur à son sommet , le cercle dont le rayon $= a$. Soit $ambM$ un cercle dont le rayon $= a$, and une parabole dont le parametre $= 2a$ & dont a est le sommet. Prenant l'abscisse évanouissante ap & menant l'ordonnée nmp , par la nature du cercle l'on a $(pm)^2 = y^2 = 2ax - x^2$, ou $2ax = y^2 + x^2$. Par la nature de la parabole $(pn)^2$ est $= Y^2 = 2ax$. Substituant dans cette équation la valeur de $2ax$ prise de la précédente , il vient $Y^2 = y^2 + x^2$, & $Y = \sqrt{y^2 + x^2}$

$\equiv y + \frac{x^2}{2y}^*$; donc $pn - pm = Y - y = \frac{x^2}{2y}$
 $\equiv \frac{(ap)^2}{2pm}$. Si pm est $= \frac{1}{\infty}$, ap sera $= \frac{1}{\infty^2}$, car
 par la propriété du cercle $bp : pm :: pm : ap$; or
 bp est une quantité finie, infiniment plus grande
 que pm , qu'on suppose $= \frac{1}{\infty}$; donc pm est infi-
 niment plus grande que ap ; mais pm est un infini-
 ment petit du premier ordre ; donc ap est un infi-
 niment petit du second ordre ; donc $ap = \frac{1}{\infty^2}$;
 $(ap)^2 = \frac{1}{\infty^4}$ & $\frac{(ap)^2}{2pm} = \frac{1}{2\infty^3}$; donc $nm = Y$
 $- y$ est plus petit qu'aucune quantité donnée ;
 donc, &c.

COROLLAIRE. Donc si l'on connoît la parabole
 qui à son sommet a la même courbure qu'une
 Courbe quelconque en un point donné (cette pa-
 rabole sera appelée *Parabole osculatrice de la*
Courbe par rapport à ce point), on aura facile-
 ment le cercle osculateur de cette Courbe au même
 point : car par le Théorème le rayon de ce cercle
 doit être égal à la moitié du parametre de la para-
 bole osculatrice.

§6. THÉORÈME II. *La parabole ordinaire ne peut*
être la Courbe osculatrice au sommet de la para-

* Elevant $y^2 + x^2$ à la puissance $m = \frac{1}{2}$ par le Binôme
 de Newton, on trouvera $(y^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} = y + \frac{1}{2} \times \frac{x^2}{y}$
 $(y^2)^{\frac{1}{2}}$

&c. $= y + \frac{x^2}{2y}$. A cause que x étant infiniment petit
 les termes suivans disparaissent devant le second.

bole désignée par l'équation $a^n - x^m = y^n$, si $\frac{n}{m} > 2$;

Soit supposée aqm (fig. 28) la parabole ordinaire; arm la parabole de l'équation $y^n = a^{n-m} x^m$, prenant l'abscisse aP extrêmement petite & menant l'ordonnée $Pm(y)$. Par la nature de la parabole arm , y^n sera

$$= a^{n-m} x^m \text{ \& } y = a^{\frac{n-m}{n}} x^{\frac{m}{n}}; \text{ donc } y^2 = a^{\frac{2n-2m}{n}} x^{\frac{2m}{n}}$$

$$= \frac{a^{\frac{2n-2m}{n}} x^{\frac{2m}{n}}}{x^{\frac{n-2m}{n}}}, \text{ à cause de } \frac{x^{\frac{2m}{n}}}{x^{\frac{n-2m}{n}}} = \frac{x^{\frac{2m}{n}}}{x^{\frac{n-2m}{n}}} = x^{\frac{2m}{n}}$$

en ôtant l'exposant du diviseur de celui du dividende; or l'équation à la parabole aqm , donne

$$y^2 = px; \text{ donc si } p = \frac{a^{\frac{2n-2m}{n}}}{x^{\frac{n-2m}{n}}} = \infty, \text{ à cause de}$$

$$x = \frac{1}{\infty} \text{ \& de } \frac{n}{m} > 2 \text{ (ce qui donne } n > 2m \text{ \&}$$

par conséquent les exposants $\frac{2n-2m}{n}, \frac{n-2m}{n}$

positifs), la parabole aqm rencontrera la parabole arm en m . Cependant la courbure de l'arc aqm sera différente de celle de l'arc arm : car prenant l'abscisse $ap(x')$ < aP & faisant $pr = z$, $pq = q$, par la propriété de la parabole arm , on a $pr = z = a^{\frac{n-m}{n}} x'^{\frac{m}{n}}$, & par la propriété de la

$$\text{parabole ordinaire } pq = q = \sqrt{px'} = \frac{a^{\frac{n-m}{n}}}{x'^{\frac{n-2m}{2n}}}$$

$\times (x')^{\frac{1}{2}}$, en substituant la valeur supposée de p ;

$$\text{donc } pr : pq, \text{ ou } z : q :: (x')^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{n-m}{n}} : (x')^{\frac{1}{2}}$$

$$\times \frac{a^{\frac{n-2m}{n}}}{x^{\frac{n-2m}{n}}} :: x^{\frac{n-2m}{2n}} : (x')^{\frac{n-2m}{2n}}, \text{ en divisant par}$$

$a^{\frac{n-2m}{n}}$ & par $(x')^{\frac{n-2m}{n}}$ & multipliant par $x^{\frac{n-2m}{2n}}$.
 Mais il est évident que x & x' , c'est-à-dire, aP & aP , peuvent être dans tel rapport d'inégalité qu'on voudra; donc pr & pq ne peuvent pas être supposées différer d'une quantité infiniment petite par rapport à elles; donc l'arc aqm n'a pas la même courbure que l'arc arm quand même la parabole aqm auroit un paramètre infini; donc, &c.

57. THÉORÈME III. Si $\frac{n}{m} < 2$ mais $\frac{n}{m} > 1$, la parabole ordinaire ne peut être la Courbe osculatrice au sommet a de la parabole arm , quand même on supposeroit le paramètre de la parabole vulgaire infiniment petit. Par un calcul semblable

$$\text{nous parviendrons à l'équation } \frac{x^{\frac{2m-n}{n}}}{a^{\frac{2m-n}{n}}} = y^2 =$$

$(Pm)^2$; ainsi pour que la parabole ordinaire passe par le point m , son paramètre p doit être =

$$\frac{x^{\frac{2m-n}{n}}}{a^{\frac{2m-n}{n}}}, \text{ qui dans ce cas est une quantité infini-}$$

ment petite. Prenant $ap = x'$, nous aurons

$$pq = \frac{x^{\frac{2m-n}{n}}}{a^{\frac{2m-n}{n}}} \times (x')^{\frac{1}{2}}, pr = a^{\frac{n-m}{n}} (x')^{\frac{m}{n}}; \text{ donc}$$

$$pq : pr :: x^{\frac{2m-n}{2n}} (x')^{\frac{1}{2}} : (x')^{\frac{m}{2n}} :: x^{\frac{2m-n}{2n}} : (x')^{\frac{2m-n}{2n}}, \text{ en divisant par } (x')^{\frac{1}{2}} \text{ \& multipliant}$$

par $a^{\frac{m}{2n}}$; donc pq & pr peuvent être dans tel rapport d'inégalité qu'on voudra , puisque x & x' peuvent être supposés dans un rapport quelconque de plus grande inégalité ; donc &c. Dans le cas du Théorème l'on a $pq > pr$, & l'arc arm se trouve situé entre l'axe & l'arc aqm , c'est-à-dire , que tous les points de ce dernier arc , excepté les points m & a , doivent être regardés comme plus éloignés de l'axe , que les points correspondants de l'arc arm .

COROLLAIRE. Il suit des Théorèmes précédents que la seule parabole vulgaire a au sommet une courbure circulaire : puisque si les autres paraboles avoient une courbure circulaire au sommet , elles auroient pour parabole osculatrice une parabole ordinaire , dont le parametre seroit double du rayon du cercle osculateur , ainsi qu'il suit du premier Théorème *.

§8. THÉORÈME IV. *Les courbures au sommet*

* Presque tous les Géomètres enseignent qu'une Courbe dont le rayon osculateur est infiniment grand ou infiniment petit , a pour Courbe osculatrice quelque parabole différente de la parabole vulgaire : il s'agit ici d'une parabole considérée à son sommet. Ce que nous venons de dire fait assez sentir ce qu'on doit penser d'une telle doctrine ; selon laquelle une parabole différente de la vulgaire pourroit avoir la même courbure au sommet que celle d'*Apollonius* , en supposant le parametre de cette dernière infiniment grand , ou infiniment petit.

des paraboles de différents ordres sont d'un genre entièrement différent. Supposant $\frac{p}{q} > \frac{m}{n}$. Je dis que

les paraboles représentées par les équations $b^{q-p} x^p = y^q$, $a^{n-m} x^m = y^n$, ne peuvent être osculatrices au sommet l'une par rapport à l'autre, quand même le paramètre b de la première seroit infini, ou le paramètre a de la seconde infiniment petit. Soit la première parabole $a q m$, la seconde $a r m$, l'ordonnée commune $P m = y$. Supposant toujours $a P = x$, nous avons $a^{n-m} x^m = y^n$, $b^{q-p} x^p = y^q$; donc prenant la racine n pour la première

équation & la racine q pour la seconde, $a^{\frac{n-m}{n}} \cdot x^{\frac{m}{n}} = y$, $b^{\frac{q-p}{q}} \cdot x^{\frac{p}{q}} = y$; donc $a^{\frac{n-m}{n}} \cdot x^{\frac{m}{n}} = b^{\frac{q-p}{q}} \cdot x^{\frac{p}{q}}$, ou (en divisant par $b^{\frac{q-p}{q}} \cdot x^{\frac{m}{n}}$) $\frac{a^{\frac{n-m}{n}}}{b^{\frac{q-p}{q}}} = x^{\frac{p}{q} - \frac{m}{n}}$. Dans cette équation, à cause

de $\frac{p}{q} > \frac{m}{n}$, le second terme est infiniment petit, en supposant x infiniment petit; donc aussi le premier terme sera infiniment petit, ce qui peut arriver, en supposant que b est infiniment grand, a étant supposé fini, ou que a est infiniment petit b étant fini. Mais dans cette supposition même il n'y a point d'osculation. En effet prenant l'abscisse

à $p = t$, nous aurons $a^{\frac{n-m}{n}} \cdot t^{\frac{m}{n}} = p r$, $b^{\frac{q-p}{q}} \cdot t^{\frac{p}{q}}$

$$= pq; \text{ donc } pr : pq :: a^{\frac{n-m}{n}} \cdot t^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{1-p}{1}} \cdot t^{\frac{p}{1}} ::$$

$$\frac{a^{\frac{n-m}{n}}}{b^{\frac{1-p}{1}}} : t^{\frac{p}{1} - \frac{m}{n}}; \text{ or nous venons de voir que}$$

$$\frac{a^{\frac{n-m}{n}}}{b^{\frac{1-p}{1}}} = x^{\frac{p}{1} - \frac{m}{n}}; \text{ donc } pr : pq :: x^{\frac{p}{1} - \frac{m}{n}},$$

$t^{\frac{p}{1} - \frac{m}{n}}$; donc puisque x & t , c'est-à-dire, aP & aP peuvent être en raison quelconque de plus grande inégalité, pr & pq ne diffèrent pas entre elles d'une quantité qr infiniment petite par rapport à elles; donc les arcs aqm , arm ne sont pas osculateurs l'un par rapport à l'autre; donc &c.

Puisque les courbures au sommet des paraboles de différents ordres sont de différents genres, il fera commode de rapporter les courbures des Courbes aux courbures des sommets des paraboles. Ayant tiré ch (fig. 23 A) perpendiculaire sur la tangente cg , & lui ayant mené l'ordonnée perpendiculaire pk , rappelons-nous l'équation entre cf & pf (51.), savoir $ax + by + cx^2 + dxy + ey^2 + fx^3 + \&c. = 0$ (P), qu'il faudra transporter aux nouvelles coordonnées ck (t) pk (u). Supposons que la raison de l'ordonnée à la sous-tangente ou de $pf : cf$, ou de la sous-normale bh à l'ordonnée bc *, est égale à la raison de

* Car le triangle gch rectangle en c donne, en supposant bc perpendiculaire sur l'hypothénuse, $bh : bc :: bc : bg$. Voyez la Géométrie.

$a : -b$; donc les côtés du triangle hbc seront comme $a, -b, -\sqrt{(a^2 + b^2)}$ *. Du point f tirez fi, fl parallèles aux nouvelles coordonnées. Les triangles semblables bhc, cfl ** donnent $ch : cb :: cf : fl$, ou $-\sqrt{(a^2 + b^2)} : -b :: x : fl = \frac{-bx}{-\sqrt{(a^2 + b^2)}}$. Les triangles semblables pif, bhc *** donnent $ch : bh :: fp : pi$, ou $-\sqrt{(a^2 + b^2)} : a :: y : pi = \frac{ay}{-\sqrt{(a^2 + b^2)}}$. Les triangles bhc, cfl donnent $ch : bh :: cf : cl$, ou $-\sqrt{(a^2 + b^2)} : a :: x : cl = \frac{ax}{-\sqrt{(a^2 + b^2)}}$. On a encore par les triangles pfi & bhc , $-\sqrt{(a^2 + b^2)} : -b :: y : fi = \frac{-by}{-\sqrt{(a^2 + b^2)}}$; or $fl + pi = ik + pi = pk = u = \frac{-bx + ay}{-\sqrt{(a^2 + b^2)}}$ & $cl - fi = ck = z$

* Si l'on compare la figure présente avec la figure 15, on verra que an alloit en s'approchant de la Courbe & en s'éloignant de l'axe des abscisses; alloit, dis-je, de la gauche à la droite, tandis que ch va en partant de l'axe des abscisses, de la droite à la gauche. Au reste à l'égard du signe de la quantité $\sqrt{(aa + bb)}$, voici la règle qu'on doit observer : si a & b ont le même signe, le radical doit avoir le signe +, & le signe - si a & b ont différents signes.

** Car ces triangles ont chacun un angle droit, & les angles $fc l$; $b h c$ alternes internes.

*** Les angles b & i sont droits, les angles gcb, fpi ayant leurs côtés parallèles sont égaux; or gcb est complément de bch , de même que bhc ; donc fpi est $= bhc$; donc &c.

$$= \frac{ax + by}{-\sqrt{(a^2 + b^2)}}; \text{ donc } ax + by = -t\sqrt{(a^2 + b^2)}....$$

$$(A). \text{ De ces équations on tire } x = \frac{at - bu}{-\sqrt{(a^2 + b^2)}} ,$$

$y = \frac{bt + au}{-\sqrt{(a^2 + b^2)}}.$ Substituant ces valeurs de x & de y dans l'équation P, vous aurez l'équation cherchée entre t & u .

Supposons d'abord que a & b ne manquent pas dans l'équation, à cause que $-ax - by = cx^2 + dyx + \&c.$, ainsi qu'on le tire aisément

$$\text{de l'équation P, \& que } t = \frac{ax + by}{-\sqrt{(a^2 + b^2)}} =$$

$$\frac{-ax - by}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} = \frac{cx^2 + dyx + \&c.}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}, \text{ il est visible}$$

$$\text{que } t \text{ est infiniment plus petit que } u = \frac{-bx + ay}{-\sqrt{(a^2 + b^2)}}$$

$$= \frac{-ay + bx}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} \text{ (en changeant les signes du numérateur \& du dénominateur),}$$

puisque t est exprimé par une fonction de plusieurs dimensions des infiniment petits x & y , tandis que u est exprimé en termes d'une seule dimension des mêmes x & y .

$$\text{De plus, parce que } u = \frac{bx - ay}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} \text{ est infini-}$$

$$\text{ment plus grand que } t = \frac{-ax - by}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} =$$

$$\frac{cx^2 + dyx + \&c.}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}, \text{ \& que } cx^2 + dyx \text{ \&c. est}$$

infiniment plus petit que ax ou by , il est visible que $-ax - by$ est infiniment petit par rapport aux quantités by & ax , aussi-bien que par rapport à $bx - ay$.

COROLLAIRE. Donc, excepté dans l'équation

tion A, on pourra faire $x = \frac{-u b}{-\sqrt{(a^2 + b^2)}}$, en

négligeant le terme $a t$, & $y = \frac{a u}{-\sqrt{(a^2 + b^2)}}$

en négligeant $b t$. Si l'on substitue dans l'équation P trouvée ci-dessus $-t \sqrt{(a^2 + b^2)}$ à la place de $a x + b y$, & dans tous les autres termes les dernières valeurs de x & de y que nous venons de trouver, il en résultera $-t \sqrt{(a^2 + b^2)}$

$$+ \left(\begin{array}{c} c b^2 \\ -d a b \\ +e a^2 \end{array} \right) \frac{u^2}{a^2 + b^2} + \left(\begin{array}{c} f b^3 \\ -g b^2 a \\ +h b a^2 \\ +i a^3 \end{array} \right) \times \frac{u^3}{(a^2 + b^2) \sqrt{(a^2 + b^2)}}$$

&c. = 0

Si le coefficient de u^2 n'est pas 0, négligeant tous les termes qui suivent le second, l'équation subsistera entre les deux premiers, & l'on aura

$$u^2 = \frac{a^2 + b^2 \sqrt{(a^2 + b^2)}}{c b^2 - d a b + e a^2} \times t = p t, \text{ en faisant le}$$

multiplicateur de t égal à la quantité p . Mais

$u^2 = p t$ est une équation à la parabole vulgaire dont le sommet a la même courbure que la Courbe au point donné; donc la parabole ordinaire, c'est-à-dire, la parabole d'*Apollonius* sera la Courbe osculatrice cherchée. Si le multiplicateur de u^2 est 0, l'équation aura lieu entre le premier & le troisième terme; ainsi en transposant, ôtant la fraction & divisant ensuite le multiplicateur de t par celui de u^3 , & faisant le quotient = p^2 , on aura $u^3 = p^2 t$. Cette équation est à la première parabole cubique, dont le sommet a la même courbure que la Courbe au point donné. Si le troisième terme manquoit, l'équation auroit lieu entre le

premier & le quatrième, & ainsi des autres ; donc il en résultera toujours une équation de cette forme $p^{n-1}t = u^n$, & la Courbe osculatrice sera toujours une parabole de l'ordre n . A l'égard du paramètre p il sera infini ; toutes les fois que a ou b étant infinis, le dénominateur de la fraction d'où résulte p^{n-1} sera infiniment plus petit que le numérateur : mais si a & b étant infiniment petits, le numérateur de la fraction est infiniment plus petit que le dénominateur, p sera néanmoins infiniment petit.

59. Si a & b sont 0 en même tems, il faut examiner le second terme $c x^2 + d x y + e y^2$. Si cette quantité n'a aucun facteur réel, on a (§3) un point conjugué, pour lequel il n'y a point de Courbe osculatrice. Si ce terme a deux facteurs réels inégaux $ax + by$, $mx + ny$, on divisera par $mx + ny$ & l'on aura $ax + by + \frac{fx^3 + gx^2y + hx^2y^2 + iy^3}{mx + ny} &c.$

$= 0$. Substituant $\frac{bu}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$ pour x & $-\frac{au}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$ pour y , excepté dans la quantité $ax + by$, pour laquelle vous écrirez $-t\sqrt{(a^2 + b^2)}$, l'on aura $-t\sqrt{(a^2 + b^2)} + \frac{(fb^3 - g ab^2 + h a^2 b - i a^3) \cdot u^2}{(mb - na) \cdot (a^2 + b^2)}$

&c. $= 0$. Si le multiplicateur de u^2 n'est pas 0, on aura une équation de cette forme $u^2 = pt$; donc la parabole d'*Apollonius* sera la Courbe osculatrice. Si le multiplicateur de u^2 manque, l'on aura $u^3 = p^3 t$. En général la Courbe osculatrice sera une parabole désignée par l'équation $u^n = p^{n-1}t$; ainsi qu'auparavant. En un mot si le premier membre qui ne manque pas dans l'équation a un facteur réel simple $ax + by$, en supposant l'autre facteur $= q$, & divisant les termes suivans par q ,

on trouvera toujours une équation de la forme $u^n = p^2 t^2$, n étant un nombre entier positif.

60. Mais si le premier membre qui se trouve ne pas manquer dans l'équation, a deux ou trois facteurs égaux, on ne peut pas négliger tous les termes où se trouve t , quoique t soit infiniment plus petit que u ; mais on doit seulement négliger les termes dans lesquels t a un exposant égal ou plus grand que le nombre des facteurs égaux, qui se trouvent dans le premier membre. Soit l'équation $(ax + by)^2 + fx^3 + gx^2y + hxy^2 + ty^3 +$

$kx^4 + \&c. = 0$. Substituant $\frac{-at - bu}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ au lieu

de x , $\frac{-bt - au}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ à la place de y , on trouvera

une équation de cette forme $t^2 + ctu^2 + du^3 + etu^3 + fu^4 + gtu^4 + \&c. = 0^*$, en négligeant tous les termes qui contiendroient t^2 , t , $\&c.$ multipliés par u , u^2 , $\&c.$ aussi-bien que tous les termes qui contiendroient t^3 , t^4 , $\&c.$: car tous ces termes disparaissent devant ceux qui contiennent la dernière équation dont on vient de parler. Si $c = 0$, mais non pas d , l'équation sera $t^2 + du^3 = 0$, ou $u^3 = -\frac{1}{d} t^2 = p t^2$, en fai-

sant $-\frac{1}{d} = p$. Cette équation est à la seconde para-

bole cubique, qui sera la Courbe osculatrice cherchée. Si $d = 0$ aussi-bien que c , on a $t^2 = -fu^4$, ou $t = \pm u^2 \sqrt{-f}$. Si f est positive, la Courbe osculatrice est imaginaire, & le point donné est un

* On suppose le premier terme de l'équation délivré de son coefficient, parce que cela est toujours possible. Voyez l'Alg.

point conjugué. Si f est négative, la Courbe osculatrice est une double parabole ordinaire; l'une de ces paraboles est située du côté des t positifs, l'autre du côté des t négatifs. Au reste ces deux paraboles sont égales. En procédant ainsi on déterminera facilement les paraboles osculatrices qui résultent de l'évanouissement des termes où se trouve t combiné avec u .

61. Supposons maintenant que c n'est pas $= 0$. Si d n'est pas $= 0$, il est visible que tu^2 est une quantité infiniment petite en comparaison de u^3 ; donc l'équation subsistera entre les deux termes $tu + du^3 = 0$. Mais si $d = 0$, tu^3 s'évanouissant devant tu^2 , l'équation subsistera dans les termes $t^2 + ctu^2 + fu^4 = 0$. Si dans cette équation on suppose t & u^2 du même ordre, tous les termes seront du même ordre. Si cette équation a tous ses facteurs imaginaires, le point donné sera un point conjugué, qui ne peut avoir aucune Courbe osculatrice. Si l'équation a deux facteurs réels, l'on trouvera deux équations de cette forme $t = mu^2$, où $u^2 = \frac{1}{m} t = p t$, qui donneront deux paraboles vulgaires osculatrices égales ou inégales, selon que les facteurs de l'équation seront égaux ou inégaux; donc la Courbe aura deux branches, qui auront pour Courbes osculatrices les paraboles dont nous venons de parler. De plus ces paraboles se confondront en une, si les facteurs de l'équation sont égaux. Si l'on a aussi $f = 0$, on aura l'équation $tu + etu^2 + hu^4 = 0$; parce que tu^4 s'évanouit devant tu^2 . Si l'on suppose que t & u^2 soient du même ordre, u^4 disparaîtra devant les deux autres termes, & l'on aura $t^2 + etu^2 = 0$, ou $cu^2 + t = 0$, ou $u^2 = \frac{-1}{c} t = p t$, équation à la parabole

d'Apollonius. Mais si l'on suppose t^2 du même degré que u^1 , ou t du même degré que $u^{\frac{1}{2}}$, $t u^2$ devient infiniment plus grand que les deux autres termes; donc l'équation ne peut subsister. Supposons t & u^3 du même degré, $t t$ disparaîtra devant les autres termes, & l'on aura l'équation $c t u^2 +$

$$h u^1 = 0, \text{ ou } c t + h u^3 = 0, \text{ ou } u^3 = -\frac{c}{h} t =$$

$p^3 t$, équation à la première parabole cubique. On peut voir maintenant ce qui arriveroit si h étant $= 0$, il falloit considérer le terme $k u^6$. c & d étant $= 0$ & non pas e , si f n'est pas $= 0$, $t u^3$ disparaîtra devant u^4 ; donc l'on aura l'équation $t^2 = -f u^4$, ou $t = \pm u^2 \sqrt{-f}$ que nous avons déjà examinée. Si $f = 0$, $t u^4$ disparaissant devant u^1 , on aura $t u^2 + c t u^3 + h u^1 = 0$, dont on ne peut tirer que la seule équation $t t + h u^1 = 0$,

$$\text{ou } u^1 = -\frac{1}{h} t^2, \text{ ou } u^1 = p^3 t^2, \text{ équation à}$$

une parabole du cinquième ordre. Si $h = 0$, on aura l'équation $t^2 + c t u^3 + k u^6 = 0$. Si t & u^3 sont du même ordre, tous les termes de l'équation seront du même ordre. Si cette équation a des facteurs imaginaires, elle indique un point conjugué. Si elle a deux facteurs réels, elle représente deux paraboles de la forme $u^3 = p^3 t$, qui sont les Courbes osculatrices de deux branches de la Courbe qui passent par le point donné. Ces deux paraboles se confondent en une, si les deux facteurs de l'équation sont égaux. En général dans ces cas on a une équation de cette forme $t^2 + A t u^p + B u^q = 0$ (H), dans laquelle $p < q$, autrement les

second terme disparaîtroit devant le troisième. Si $q = 2p$ tous les termes de l'équation seront homogènes, en supposant $t = u^2$. Si l'équation n'a point de facteurs réels, elle indique un point conjugué. Si elle a deux facteurs réels, elle se réduit à deux équations de cette forme $u^m = a^m t$ qui donnent deux paraboles osculatrices, qui se confondent en une lorsque les facteurs sont égaux. Si $p > q$, l'équation H devient $t^2 + bu^2 = 0$, qui se résout en deux si q est un nombre pair, ou qui donne une seule parabole osculatrice si q est un nombre impair. Enfin si $2p < q$, on a deux équations de cette forme $u^m = a^m t$, $u^n = b^n t$ qui donnent deux paraboles osculatrices par rapport à deux branches de la Courbe qui passent par le même point*.

Si le facteur double $(ax + by)^2$ étoit multiplié par une fonction entière de x & de y , en substituant les valeurs de x & de y , données en t & u , & divisant par le multiplicateur du facteur double, en faisant attention que tous les termes qui contiennent t disparaissent devant celui qui contient seulement u , il est visible qu'on parviendra à une équation de la même forme que celle que nous avons trouvée ci-dessus.

62. Si le premier membre de l'équation contient un facteur triple, nous parviendrons à une équation de cette forme $t^3 + at^2u + btu^2 + cu^3 = 0$, dans

* L'équation H donne alors les deux suivantes $t^2 + Atu^2 = 0$, $At + Bu^2 = 0$, ou en supposant $q = p+m$ & $\frac{A}{B} = b^{m-1}$, $u^m = b^{m-1}t$, or l'équation $t^2 + Atu^2 = 0$ donne $u^n = a^n t$.

laquelle on ne peut supposer $p < 2$, mais on a $p < q$ & $q < r$. Si a & b sont $= 0$, on aura l'équation $r^3 + c u^3 = 0$, qui détermine l'espèce de la parabole osculatrice. Si r est divisible par 3, on trouvera $z = -\sqrt[3]{\frac{r}{c}}$, ou $z = p^{n-1} z$, en faisant $\frac{r}{3} = m$ & $\frac{-z}{\sqrt[3]{c}} = p^{n-1}$; donc la parabole oscu-

latrice sera de l'ordre m , & parce que $\sqrt[3]{c}$ a une valeur réelle & deux imaginaires, il y aura au même point de la Courbe un point conjugué. Si $2p = q$ & $3p = r$, & par conséquent $3q = 2r$, en supposant z & u du même ordre, tous les termes seront homogènes, c'est-à-dire, du même ordre, & on ne pourra en négliger aucun. Si la formule a un facteur réel & deux imaginaires; avec un point conjugué, on aura encore une parabole osculatrice de la forme $u = a^{p-1} z$. Si les trois facteurs sont réels on a trois paraboles osculatrices de la même forme, deux ou même les trois se confondront ensemble, si deux ou les trois facteurs sont égaux. Si les exposants n'ont pas la proportion dont nous venons de parler, supposez successivement du même ordre les termes pris deux à deux; examinez ensuite ce que les autres deviennent. S'ils se trouvent du même ordre, on ne peut pas les négliger, s'ils sont infiniment petits par rapport à ceux qu'on suppose du même ordre, l'équation aura lieu entre ces deux là seulement. Si quelqu'un des termes négligés se trouve infiniment plus grand que les deux termes comparés, l'équation ne peut avoir lieu entre ces deux termes. Par cette méthode vous déterminerez toutes

les paraboles osculatrices par rapport à un point donné d'une Courbe algébrique. On suivra la même méthode si le premier membre contient quatre, cinq, six, &c. facteurs égaux.

63. COROLLAIRE. On peut conclure de ce qu'on vient de dire, qu'il n'y a aucun arc d'une Courbe quelconque qui n'ait une parabole pour Courbe osculatrice. C'est pourquoi on peut distinguer les divers genres de courbure par les différents genres des paraboles. Je mets dans le premier genre des paraboles celles qui ont la forme $y = px^m$, m étant un nombre entier positif. Le point de la Courbe où se fait l'osculation est alors un point simple. Si $m = 2$, on peut comparer la courbure avec la courbure circulaire. Si $m = 3$, la Courbe a un point d'*inflexion* & de concave devient convexe dans ce point (fig. 29) : on fait que la première parabole cubique a un point d'inflexion au sommet (Voyez ce que nous avons dit dans les Sections Coniques sur les paraboles de différents ordres). Si $m = 4$, on ne voit aucun point d'inflexion (fig. 30) ; mais on a coutume de considérer un point d'inflexion double, qu'on peut appeler *point de serpentement* ; car la Courbe de convexe devient concave, & aussi-tôt de concave redevient convexe. Si $m = 5$, on a un point d'inflexion visible ; mais on regarde ce point comme répondant à une inflexion triple, à cause que la Courbe de concave devient convexe, ensuite de nouveau concave, & enfin de nouveau convexe, & ainsi successivement ; de sorte que le nombre des inflexions est toujours $m - 2$, & les inflexions sont visibles ou invisibles, selon que m est un nombre impair ou pair. Dans ce dernier cas on a des points de serpentement,

Les paraboles du second genre sont de la forme $t^2 = pu^m$, qui indique des points doubles, dont chacun équivaut à deux points simples. Si $m = 3$, on aura un *point de rebroussement de la première espèce* (c'est celui dans lequel deux branches de la même Courbe se présentent leurs convexités), parce que la parabole cubique $t^2 = pu^3$ (fig. 31) a une telle figure.

Si $m = 4$ il en résultera la forme de la fig. 32, qui ne représente que deux paraboles ordinaires. En général les branches de la parabole osculatrice sont comme dans la figure 31 si m est impair, & comme dans la figure 32 si m est pair. Mais dans ce dernier

cas il y a deux paraboles de la forme $t = pu^{\frac{m}{2}}$.

64. COROLLAIRE. Il suit de ce qui précède, que le point d'une Courbe est double lorsqu'il est conjugué, lorsqu'on a au même point de la Courbe deux paraboles osculatrices ordinaires, ou quand la parabole osculatrice est du second genre.

Les paraboles du troisième genre sont de la forme $t^3 = pu^m$. Le point d'osculation est alors triple. Si $m = 4$, la figure est semblable à celle de la parabole ordinaire. Si $m = 5$, on a un point d'inflexion; si $m = 6$, en prenant la racine cube, on a une parabole de la forme $t = pu^2$; & à cause des deux autres racines imaginaires, on a encore un point conjugué double. En général si m est impair la Courbe a un point d'inflexion contraire, si m est pair on a la figure de la parabole ordinaire. Mais si m est divisible par 3, on a une parabole du premier genre avec un point conjugué. C'est pourquoi l'on a un point triple dans la Courbe lorsqu'on a un point conjugué & une parabole osculatrice du

premier genre, ou lorsqu'on a trois paraboles du premier genre, ou une du premier & une du second; ou enfin une du troisième.

On peut remarquer que cela ne prouve pas que la Courbe existe réellement. Cela démontre seulement que l'osculation a lieu si la Courbe existe, mais il peut arriver que la Courbe & sa branche soient imaginaires; dans ce cas on a un point conjugué. Supposons que nous ayons trouvé l'équation $t^2 - \frac{2tu^2}{b} + \frac{u^4}{b^2} + \frac{u^6}{b^3} = 0$. Négligeant le

dernier terme on trouve deux racines égales $t - \frac{u^2}{b} = 0$. Mais en ne négligeant rien & transposant le dernier terme, l'on a $t^2 - \frac{2tu^2}{b} + \frac{u^4}{b^2} = -\frac{u^6}{b^3}$;

prenant les racines il vient $t - \frac{u^2}{b} = \pm \frac{u^3}{b^2} \sqrt{-1}$,

ou $t = \frac{u^2}{b} \pm \frac{u^3}{b^2} \sqrt{-1}$ *; ainsi les racines sont imaginaires, & l'on n'a qu'un point conjugué. C'est pourquoi, à cause des termes négligés comme infiniment petits par rapport aux autres, on peut trouver une Courbe osculatrice réelle, qui réellement est imaginaire, & qu'on trouveroit telle en poussant le calcul plus loin.

Soit l'équation $t^2 - \frac{2tu^2}{b} + \frac{u^4}{b^2} + \frac{u^5}{b^3} = 0$; en négligeant le dernier terme, l'équation a deux facteurs égaux qui donnent deux paraboles ordinaires

* Si petit qu'on suppose u de ce qu'il existe, $\frac{u^3}{b^2} \sqrt{-1}$ est une quantité imaginaire.

osculatrices qui se confondent en une, ce qui ne prouve pas que la Courbe a deux ou quatre branches réelles qui passent par le point donné & qui embrassent l'abscisse z positive : car faisant passer le dernier terme à la droite du signe d'égalité, prenant ensuite les racines & transposant, il vient

$$z = + \frac{u^2}{b} \pm \frac{u^2}{b\sqrt{b}} \sqrt{(-u)}, \text{ si } u \text{ est positif,}$$

z est imaginaire & la Courbe n'a aucune branche du côté des u positifs ; mais si u est négatif la Courbe a deux branches réelles qui répondent à la même abscisse ap (fig. 33), l'une & l'autre branche ayant pour parabole osculatrice en a la même parabole vulgaire.

65. On peut voir par-là l'existence des points de rebroussement de la seconde espèce ; dans laquelle deux branches de la même Courbe sont tellement disposées que la concavité de l'une est tournée du côté de la convexité de l'autre : ce qui ne vient pas de la figure des paraboles osculatrices ; car aucune parabole ne peut avoir les branches ainsi disposées, & s'il y avoit deux paraboles, aux branches ac , ab s'en joindroient deux autres. Mais cela vient de ce que par la nature de l'équation de la Courbe, les branches du côté des ordonnées positives sont imaginaires, les branches qui répondent aux ordonnées négatives étant réelles ou réciproquement. Nous en avons encore un exemple dans

la Courbe de l'équation $y = \sqrt{x} \pm \sqrt[4]{x^3}$ (fig. 2) : car on ne peut pas supposer x négatif, ni prendre le radical \sqrt{x} en $-$, autrement y seroit imaginaire dans les deux cas ; en effet dans le premier on auroit $y = \sqrt{-x} \pm \sqrt[4]{-x^3}$, & dans le

second le radical $\sqrt{x^3}$ feroit une quantité imaginaire, ainsi que nous l'avons fait voir ailleurs (2). On peut remarquer que quoique les deux branches de cette Courbe soient d'abord situées au-dessus de l'axe des x , cependant une de ces branches coupe bientôt cet axe & descend au-dessous.

66. Cherchons maintenant quelle est la courbure des paraboles dans les autres points. Soit l'équation générale des paraboles $a^{n-1}p = q^n$, on suppose n plus grande que l'unité. Si on augmente p de la quantité x , & q de la quantité y , on aura $a^{n-1}(p+x) = (q+y)^n$, ou en résolvant le second membre en série, $a^{n-1}p + a^{n-1}x = q^n + nq^{n-1}y$

$+ \frac{n(n-1)}{2} q^{n-2} y^2 + \&c.$ De cette équation retranchant la première, il vient $a^{n-1}x = nq^{n-1}y$

$+ \frac{n(n-1)}{2} q^{n-2} y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} q^{n-3} y^3$

$+ \&c.$ En supposant x & y infiniment petits, négligeant les termes qui disparaissent devant celui qui contient y^2 , on trouvera, en transpo-

sant, $a^{n-1}x - nq^{n-1}y - \frac{n(n-1)}{2} q^{n-2} y^2 = 0.$

Mais l'équation $a^{n-1}p = q^n$, donne $\frac{q^n}{q}$, ou q^{n-1}

$= \frac{a^{n-1}p}{q}$, & $q^{n-2} = \frac{a^{n-1}p}{q^2}$. Substituant ces va-

leurs de q^{n-1} , q^{n-2} & divisant ensuite par a^{n-1} ,

on a l'équation $x - \frac{np y}{q} - \frac{n(n-1)}{2} \times \frac{p y^2}{q^2} = 0.$

ou $q x - np y - \frac{n(n-1) p y^2}{2 q} = 0.$ Pour trans-

porter l'équation aux abscisses t , prises sur la per-

pendiculaire à la tangente au point donné, il faut

$$\text{faire } x = \frac{q^2 - n p u}{\sqrt{(q q + n n p p)}}, y = \frac{n p t + q u}{\sqrt{(q^2 + n^2 p^2)}}^*,$$

z étant infiniment petit respectivement à u , & l'équation deviendra en transposant & divisant,

$$u^2 = \frac{(q^2 + n^2 p^2) \cdot \sqrt{(q^2 + n^2 p^2)}}{n \cdot (n-1) \cdot p q} \cdot z = b z, \text{ équation}$$

tion à la parabole ordinaire.

COROLLAIRE I. La courbure de toutes les paraboles dans tous leurs points, excepté au sommet, est donc de même espèce que la courbure au sommet de la parabole ordinaire, & par conséquent de même espèce que la courbure circulaire.

Supposant p l'abscisse, q l'ordonnée, b le paramètre, on a par la nature de la parabole d'*Apollonius* $b : q :: q : p$; donc lorsque q est infiniment petit, p est encore infiniment plus petit; donc dans ce cas $q^2 + n^2 p^2 = q^2$, & l'équation devient $u^2 = \frac{q^2 z}{n \cdot (n-1) \cdot p}$. Si p est du même ordre

que q^2 , comme cela arrive dans la parabole ordinaire, le paramètre b sera fini. Si p est infiniment petit, respectivement à q^2 , ce qui arrive lorsque $n > 2$, le paramètre devient infini. Si p est infiniment plus grand que q^2 , ce qui a lieu si $n < 2$, le paramètre devient infiniment petit. C'est pour-

* On trouvera ces mêmes formules en faisant $q = a$, $n p = b$, voyez le n° 58. Comme q & $n p$ ont les mêmes signes que a & b , on ne doit rien changer aux valeurs de x & de y (58).

quoi prenant dans une parabole quelconque un arc infiniment petit & si proche qu'on voudra de son sommet , pourvu qu'on n'y comprenne pas ce sommet , tirant par le milieu de cet arc une ligne qui lui soit perpendiculaire , on trouvera toujours pour cet arc une Courbe osculatrice , qui sera la parabole ordinaire , dont l'axe sera situé sur cette perpendiculaire prolongée s'il le faut , ce qui arrive si la Courbe est convexe du côté de son axe , mais alors le parametre de la parabole osculatrice est négatif.

67. COROLLAIRE II De-là on peut conclure que ce n'est qu'aux points singuliers que la courbure d'une Courbe peut être différente de la courbure au sommet de la parabole ordinaire , ou d'une nature différente de la courbure circulaire.

De la figure des Courbes dans un espace fini.

68. Supposons d'abord que l'ordonnée y est égale à une fonction rationnelle de x , dans ce cas y ne sera jamais imaginaire & la Courbe s'étendra à l'infini du côté des abscisses négatives , aussi-bien que du côté des positives. Soit , par exemple , $y = \frac{(x+a)(x-b).x}{a^2}$, supposant $x = \infty$, on a $y = \frac{x^3}{a^2}$; donc la Courbe a deux branches infinies du genre parabolique , dont les branches de la parabole $y = \frac{x^3}{a^2}$ sont les asymptotes curvilignes ; l'une de ces branches a les abscisses & les ordonnées positives , l'autre n'a que des abscisses & des ordonnées négatives. Prenant le point a (fig. 34)

pour l'origine, & la ligne cb pour l'axe des abscisses, faisant l'abscisse positive $ab = x = b$, le facteur $x - b$ deviendra $= 0$; donc au point b l'ordonnée y est $= 0$, & la Courbe passe par le point b . Supposant $x = 0$, on a encore $y = 0$; donc la Courbe passe par le point a . Prenant du côté des x négatifs $ac = a$, le facteur $x + a$ deviendra $-x + a = -a + a = 0$; donc la Courbe passe encore par le point c . La tangente de la Courbe au point a fait, avec la ligne des abscisses, un angle, dont le sinus est au cosinus comme $b : a$; pour le point b cet angle est tel que son sinus est à son cosinus comme $b. (a + b) : a^2$, & comme $a + b : a$ pour le point c . Depuis a jusqu'en b les ordonnées sont négatives, mais elles sont positives depuis b jusqu'à l'infini. Si $b = 0$, la partie adb s'évanouit & la ligne des abscisses devient tangente de la branche af (fig. 35). Enfin donnant plusieurs valeurs successives à x , on menera les ordonnées correspondantes aux abscisses aP, ah, ak , &c. (fig. 34), ou ah, aP , &c. (fig. 35), & l'on connoîtra par-là la figure de la Courbe dans un espace fini.

Si on avoit l'équation $y = \pm \sqrt{(2ax - x^2)} \pm \sqrt{(ax - x^2)}$, pour connoître la figure de la Courbe, faisant $\sqrt{(2ax - x^2)} = r$, décrivez le cercle ahb d (fig. 36) de cette dernière équation, dont le rayon sera $= a$. Faisant de même $\sqrt{(ax - x^2)} = u$,

décrivez le cercle $atCs$ dont le rayon $= \frac{a}{2}$. A tous les points g du premier cercle appliquez gM & gm , chacune égale à fL , enforte que les ordonnées fg soient augmentées & diminuées de la quantité correspondante fL ; les points M & m seront à la Courbe cherchée. On fera la même chose pour chaque

ordonnée fh correspondante, & l'on aura la Courbe $ant a M d q$, qui sera composée de deux feuilles, & dans laquelle $y = \dots z \dots u$.

Si l'ordonnée y étoit égale à une fonction radicale de x , qui renfermât une autre fonction radicale de x , par exemple, si on avoit $y = \pm \sqrt{(a^2 + x^2 \pm \sqrt{(a^4 - x^4)})}$, dans ce cas on ne pourroit trouver la figure de la Courbe, qu'en donnant successivement plusieurs valeurs à x , & calculant pour chacune de ces valeurs, la valeur correspondante de y . En un mot on suivroit la méthode ci-dessus (2).

Des lignes Courbes décrites par le moyen des instruments.

69. PROBLÈME. D'un point a (fig. 37) situé hors d'une droite ut , ayant abaissé sur cette droite la perpendiculaire ab , prolongée jusqu'en d , on demande la nature de la Courbe que décrira l'extrémité de la ligne ad prolongée autant qu'il le faut, pendant le mouvement de cette ligne autour du point a , en supposant qu'on prenne toujours l'interceptée $rn = bd$. Supposons que ad est parvenue dans la situation an , du point n de la Courbe tirez nm perpendiculaire sur ad . Faisons, $mn = y$, $ab = a$, $bd = rn = b$, $am = x$, & $mb = x - a$. Le triangle rectangle amn donne $an = \sqrt{(y^2 + x^2)}$; mais à cause des parallèles br & mn , l'on a $\sqrt{(y^2 + x^2)} : x :: b : x - a$, ou en quarrant, $y^2 + x^2 : x^2 :: b^2 : x^2 - 2ax + a^2$, & par soustraction $y^2 : x^2 :: b^2 - x^2 + 2ax - a^2 : x^2 - 2ax + a^2$. Faisant le produit des extrêmes &

& celui des moyens, & retranchant le second du premier, il vient

$$\begin{aligned} x^2 y^2 + x^4 &= 0 \\ - 2 a x y^2 - 2 a x^3 \\ + a^2 y^2 + a^2 x^2 \\ &= b^2 x^2 \end{aligned}$$

Si on suppose $bc = bd = a$, l'équation ci-dessus, qui renferme les deux Courbes décrites par les points d & c , en supposant qu'on prenne toujours $r q = b$, deviendra plus simple à cause des termes qui se détruiront *. La Courbe dont nous venons de trouver l'équation, s'appelle la *Conchoïde de Nicomede*, qui en est l'inventeur ; nous appellerons la Courbe $d n$ *Conchoïde ultérieure*, & la Courbe $c q$ *Conchoïde citérieure*. La Conchoïde ultérieure a la même figure dans quelque hypothèse que ce soit, c'est-à-dire, que s'écartant de part & d'autre du point d , elle s'approche de la ligne $u t$, vers laquelle elle tourne d'abord sa concavité ; mais bientôt elle se fléchit en sens contraire & tourne sa convexité vers $u t$, en s'approchant toujours de cette ligne qui est son asymptote **. La Conchoïde citérieure, représentée par la même équation, a pour asymptote la même ligne $u t$; mais si b est $< a$ & que le point c soit situé entre a & b , elle présente d'abord sa concavité & bientôt après sa convexité à la ligne $u t$;

* Si l'on suppose $a M = x$, $q M = y$, & qu'on fasse attention que $q M$ est parallèle à $b r$, on verra aisément que $\sqrt{(y^2 + x^2)} : x :: b : a - x$, ou $y^2 + x^2 : x^2 :: b^2 : a^2 - 2 a x + x^2$, d'où l'on tire la même équation que nous avons déjà trouvée pour la Conchoïde ultérieure.

** Car en supposant que $r n = b$ représente le sinus total, $n p$ sera le sinus de l'angle $n r p = a r b$; or à l'infini cet angle est infiniment petit ; donc à l'infini $n p = \frac{1}{\infty}$; donc, &c.

Tome II.

Q

de laquelle elle s'approche continuellement, à proportion que an fait un plus grand angle avec da . Si $b = a$, & que les points c & a tombent l'un sur l'autre (fig. 38), les branches auront pour tangente commune au point a , la ligne ba , & le point a sera un point de rebroussement de la première espèce, parce que les branches de cette Courbe en partant du point a pour s'approcher de leur asymptote se présentent leur convexité.

Enfin si $b > a$ (fig. 39) & que le point c tombe sur le prolongement de ba , l'une des branches sera $cqat$, l'autre cam , de sorte que dans ce cas la Conchoïde citérieure est accompagnée d'une feuille acq .

70. PROBLÈME. Trouver l'équation de la Courbe $amqsa$ décrite par le point m du cercle km qui roule sur son égal ba (fig. 40). Supposant qu'au commencement du mouvement le point décrivant se trouve en a ; lorsque ce point sera parvenu en m , il est visible que l'arc ab sera égal à l'arc bm . Ayant joint les centres des deux cercles par la droite ck qui passe nécessairement par le point de contact b (autrement la distance ck ne seroit pas égale à la somme des deux rayons $cb + bk$), tirez la ligne km jusqu'à la rencontre de ca prolongée. A cause que les arcs égaux bm , ba appartiennent à des cercles égaux, les angles acb , bkm seront égaux; donc le triangle dck est isocèle; donc $cd = dk$, & $dc - ac = dk - mk$, ou $da = dm$; donc la ligne droite am coupe les côtés dc , dk du triangle dck en parties proportionnelles; donc am est parallèle à ck ; donc db qui coupe ck en deux également, coupera aussi am en deux également en t ; donc $at = tm$.

De plus db coupant en deux également la base du triangle isocèle cdk , est nécessairement perpendiculaire sur cette base & par conséquent aux rayons bc , bk ; donc 1^o elle est tangente aux deux cercles; donc 2^o elle est perpendiculaire à la ligne am , parallèle à ck . Menons mn perpendiculaire sur cd , & appelant r le rayon cb ou bk , faisons $cn = x$, $an = cn - ac = x - r$, $mn = y$, $(am)^2 = (mn)^2 + (na)^2 = y^2 + (x - r)^2$, $at = \frac{\sqrt{(y^2 + (x - r)^2)}}{2}$. A cause des triangles sem-

blables cdb , adt , l'on a $cb : at :: cd : da$, ou *subtrahendo*, $cb : cb - at :: cd : ca$, ou $r : r - \frac{\sqrt{(y^2 + (x - r)^2)}}{2} :: cd : r$; donc $cd =$

$\frac{r^2}{2r - \frac{\sqrt{(y^2 + (x - r)^2)}}{2}}$; mais les triangles cbd ,

nam ayant les angles en a & c égaux, & les angles en b & n droits sont semblables & donnent

$cd : cb :: am : an$, ou $\frac{r^2}{2r - \frac{\sqrt{(y^2 + (x - r)^2)}}{2}} : r ::$

$\frac{\sqrt{(y^2 + (x - r)^2)}}{2} : x - r$, ou (en multipliant les deux premiers termes par le diviseur du premier,

& les divisant par r) $r : r - \frac{\sqrt{(y^2 + (x - r)^2)}}{2} ::$

$\frac{\sqrt{(y^2 + (x - r)^2)}}{2} : x - r$; donc égalant le produit des moyens à celui des extrêmes, $rx - r^2$

$= r\sqrt{(y^2 + (x - r)^2)} - \left(\frac{y^2 + (x - r)^2}{2}\right)$, ou trans-

posant, développant $(x - r)^2$ & réduisant,
Q 2

$$\frac{x^2 + y^2 - r^2}{2} = r \sqrt{(y^2 + (x-r)^2)}, \text{ ou ôtant la fraction, \& faisant les opérations ordinaires}$$

$$y^4 + 2x^2y^2 + x^4 = 0 \quad \text{équation qui exprime}$$

$$= 6r^2y^2 - 6r^2x^2 \quad \text{la nature de la Courbe}$$

$$+ 8r^3x \quad \text{am sa, qu'on appelle}$$

$$- 3r^4 \quad \text{Epicicloïde.}$$

71. PROBLÈME. Supposant une équerre nam (fig. 41), dont les branches soient d'une longueur quelconque, mobile par son sommet a , autour de l'extrémité a de la ligne ab , supposant en même temps qu'une ligne indéfinie m perpendiculaire sur ab , se meuve de a en b parallèlement à elle-même, on demande l'équation de la Courbe an , que décrit le point de concours n des lignes ad , mn , tandis que le concours m des lignes am , nm décrit la Courbe amb . Soit $ap = x$, $pm = z$, $pn = y$. A cause de l'angle droit nam & de la ligne ap perpendiculaire sur l'hypothénuse nm du triangle rectangle nam , on a $pm : ap :: ap : pn$, ou $z : x :: x : y$; donc $z = \frac{x^2}{y}$. Si dans cette valeur de z vous substituez sa valeur en x donnée par l'équation de la Courbe amb , dont ap est l'abscisse & pm l'ordonnée, vous aurez l'équation de la Courbe cherchée.

Soit amb un demi-cercle dont le diamètre $ab = 2a$, pm , ou z sera $= \sqrt{(2ax - x^2)}$, & l'on aura l'équation $\sqrt{(2ax - x^2)} = \frac{x^2}{y}$, ou en quar-

$$\text{rant, } 2ax - x^2 = \frac{x^4}{y^2}, \text{ ou } y^2 = \frac{x^4}{2ax - x^2}, \text{ ou}$$

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x}.$$

On trouve la même équation si on propose ce

Problème. Ayant décrit un demi-cercle adb sur le diamètre ab , par l'extrémité duquel on a mené la perpendiculaire indéfinie bu , du point a menant à tous les points u de bu des lignes anu , en faisant toujours un égale à la corde correspondante ad , quelle est la nature de la Courbe qui passe par tous les points n ainsi déterminés? Cette Courbe est appelée la *Cissoïde de Dioclès* son inventeur. Mais démontrons que dans la Courbe dont nous venons de trouver l'équation, on a toujours $un = da$. Ayant tiré la ligne dm , à cause de l'angle droit dam , $dalm$ sera une demi-circconférence & dm un diamètre; mais l'angle amb est droit, parce qu'il est appuyé sur le diamètre ba ; donc mb est parallèle & égale à da ; donc bm est parallèle à nu ; donc $unbm$ est un parallélogramme; donc $un = bm = da$; donc la Courbe dont nous avons trouvé l'équation est la *Cissoïde* de Dioclès.

COROLLAIRE I, De l'équation $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$;

on tire $y = \pm \sqrt{\left(\frac{x^3}{2a-x}\right)}$; donc à chaque abscisse ap répondent deux ordonnées égales pn, pq , l'une positive, l'autre négative. Si l'on suppose $ap = x = ab = 2a$, l'on aura $2a - x = 0$ & $y^2 = \frac{x^3}{0} = \infty$; donc les deux ordonnées qui répondent au point b sont infinies, & la Courbe a deux branches qui, partant du point a (qui est un point de rebroussement de la première espèce) vont toujours en s'écartant de l'axe ab . La ligne ac est l'asymptote de la *Cissoïde*: car lorsque la ligne $ad = nu$ devient $= \frac{1}{\infty}$, le point n & le point u

s'approchent infiniment, de même que le point u & le point o ; donc, &c.

COROLLAIRE II. De l'équation $z = \frac{x^2}{y}$, on peut tirer aisément l'équation d'un très-grand nombre de Courbes : car supposons que l'équation de la Courbe $al b$ est $b^{m-n} x^n = z^m$, où $z = b^{\frac{m-n}{m}} x^{\frac{n}{m}} = \frac{x^{\frac{n}{m}}}{y}$, on aura (en prenant les puissances m) $b^{m-n} x^n = \frac{x^{nm}}{y^m}$. Multipliant par y^m , divisant par

$x^n b^{m-n}$ & faisant $\frac{1}{b^{m-n}} = p^{n-m}$, on a $y^m = p^{n-m} x^{nm-n}$, équation de la Courbe dans ce cas.

Si la courbe alm étoit une hyperbole équilatère, dont le premier axe fût $= 2a$, on auroit $z = \sqrt{2ax + x^2}$ $= \frac{x^2}{y}$, ou $2ax + x^2 = \frac{x^4}{y^2}$, ou multipliant par y^2 & divisant par x , $y^2 \times (2a + x) = x^3$, & enfin $y^2 = \frac{x^3}{2a + x}$, équation de la Courbe cherchée dans ce cas. Si la Courbe alm étoit une paraboloïde désignée par l'équation $ax^m + bx^n + d = z$, on auroit $\frac{x^2}{y} = ax^m + bx^n + d$, ou $y = \frac{x^2}{ax^m + bx^n + d}$, qui feroit l'équation de la Courbe ano .

72. PROBLEME. Quelle est la nature de la Courbe que décrira le point a de l'équerre mau , dont la branche $am = a$, en supposant que l'extrémité m de cette branche se meut sur la ligne nm ; & que l'autre branche indéfinie a toujours un de ses points sur le point fixe n de la ligne indéfinie np ? soit $np = x$, $pa = y$. A cause de ap perpendiculaire sur l'hypothénuse nm du triangle rec-

triangle nam , l'on a $np : pa :: pa : pm$, ou $x : y :: y : pm = \frac{y^2}{x}$. Mais le triangle rectangle pam donne $(am)^2 = (ap)^2 + (pm)^2$, ou $a^2 = y^2 + \frac{y^4}{x^2}$; donc $a^2 x^2 = y^2 x^2 + y^4$, ou $y^4 + y^2 x^2 - a^2 x^2 = 0$, équation de la Courbe.

Des Courbes dont on trouve l'équation par des propriétés données qui dépendent de plusieurs points de section.

73. Étant donnée une Courbe $mdng$ (fig. 42), dont l'axe des abscisses soit ab , & dont bm & bn soient deux ordonnées correspondantes à la même abscisse ab , la somme $bm + bn$ des ordonnées, leur produit, la somme de leurs quarrés, & en général la somme de leurs puissances quelconques peut être supposée donnée, ou par des constantes, ou par une fonction de $x = ab$. A cause qu'à l'abscisse ab répondent deux ordonnées bm, bn , la valeur de y sera double; donc elle sera déterminée par une équation de cette forme $y^2 - 2my + n = 0$. Cette équation étant résolue par la méthode du second degré, donne deux racines $y = m \pm \sqrt{m^2 - n}$. C'est de ces valeurs de y qu'on doit tirer l'équation qu'exige la propriété donnée (m & n doivent être données toutes les deux, ou au moins l'une des deux par une fonction de la variable x , l'autre étant une constante si la propriété demandée l'exige) & dont la valeur substituée dans l'équation supposée donnera les Courbes qui jouissent de la propriété donnée.

74. PROBLÈME. Déterminer les Courbes dans lesquelles le rectangle $bm \times bn = p$. Donc $bm \cdot bn$

$= (m + \sqrt{(m^2 - n)}) \times (m - \sqrt{(m^2 - n)}) = +n = p$.
 Substituant la valeur de n dans l'équation générale, on aura $y^2 - 2my + p = 0$, qui donnera la Courbe qui jouit de la propriété demandée quelle que soit la valeur de m . Si p est une quantité constante $= a^2$ & $m = a + dx$, l'on aura $y^2 - (2a + 2dx).y + a^2 = 0$, équation à l'hyperbole rapportée à ses asymptotes * ; en effet on fait que cette propriété convient à l'hyperbole. Si $m = \frac{x^2}{a}$,

l'équation devient $y^2 - \frac{2x^2y}{a} + p = 0$. Si $p = x^3$,

on a $y^2 - \frac{2x^2y}{a} + x^3 = 0$, ou $ay^2 - 2x^2y + ax^3 = 0$, équation qui appartient à une ligne du troisième ordre, qui a la propriété demandée.

75. PROBLÈME. *Trouver les Courbes dans lesquelles la somme $bm + bn$ de deux ordonnées correspondantes à la même abscisse ab est $= p$.* Puisque le coefficient du second terme d'une équation pris avec un signe contraire est égal à la somme des racines (voyez l'Algebre), on a $2m = bm + bn$; donc l'équation générale devient $y^2 - py + n = 0$, quelle que soit la valeur de n . Soit $p = 2x$, & $n = 3x^3$, on aura $y^2 - 2yx + 3x^3 = 0$, équation à une Courbe, dont la somme des ordonnées est double de l'abscisse. Soit $p = 2a$, $n = a^2 - \frac{x^3}{a}$, l'équation deviendra $y^2 - 2ay +$

* Pour comprendre comment cette équation appartient à l'hyperbole rapportée à ses asymptotes, on n'a qu'à se rappeler (16) qu'il suffit pour cela que le carré des ordonnées manque dans l'équation; or en changeant y en x & réciproquement, ce carré manque; donc, &c.

$a^2 - \frac{x^3}{a} = 0$, ou $(y - a)^2 \cdot a = x^3$, ou (en faisant $y - a = z$) $x^3 = a z^2$, équation à la seconde parabole cubique. Pour le faire voir, supposons que Mfd (fig. 43) représente la seconde parabole cubique, a étant l'origine & ab l'axe des x . Prenez af parallèle aux ordonnées & $= a$, par le point f menez fg parallèle à cb ; par le point f pris pour sommet, décrivez (en prenant fg pour l'axe des abscisses) la seconde parabole cubique, dans laquelle les cubes x^3 des abscisses fg sont égaux aux quarrés des ordonnées cg multipliés par a . Ayant mené une double ordonnée quelconque bm , bn on a toujours $bm + bn = 2a$. Au point c où $bm = 0$, on a $cd = 2a$, & en p où l'ordonnée pM est négative on a $pN - pM = 2a$.

76. PROBLÈME. Trouver les Courbes dans lesquelles $(bm)^2 + (bn)^2 = p$. Par la nature du Problème on a $p = (m + \sqrt{(m^2 - n)^2} + (m - \sqrt{(m^2 - n)^2}))^2 = 4m^2 - 2n$; donc en divisant par 2 & transposant, $2m^2 - \frac{p}{2} = n$. Substituant cette valeur de n dans l'équation générale, on aura $y^2 - 2my + 2m^2 - \frac{p}{2} = 0$. Supposons $p = 2a^2$ & $m = \frac{ax}{f}$, pour avoir l'équation $y^2 - \frac{2axy}{f} + \frac{2a^2x^2}{f^2} - a^2 = 0$, qui est à l'Ellipse.

Pour construire cette équation, prenez $af = f$ (fig. 44), $fd = a$, ap égale & parallèle à fd , tirez la ligne ad , & supposant les demi-diamètres conjugués ap , ad , sur ces lignes prolongées de part & d'autre du centre a , décrivez l'Ellipse mdp .*

* L'équation par rapport aux diamètres conjugués dont

Ayant mené une ligne quelconque $m b n$, on aura toujours $(b m)^2 + (b n)^2 = 2 a^2 = 2 \times (a p)^2$, & si $a p = a d$ & que l'angle $p a d$ soit droit, l'Ellipse se changera en cercle, de sorte que l'Ellipse & le cercle ont cette propriété.

77. PROBLÈME. *Trouver une Courbe dans laquelle* $(b m)^3 + (b n)^3 = p$ (fig. 42). On aura donc $p = (m + \sqrt{m^2 - n^2})^3 + (m - \sqrt{m^2 - n^2})^3 = 8 m^3 - 6 m n$; donc (en transposant & divisant par $6 m$) $\frac{4 m^2}{3} - \frac{p}{6 m} = n$; donc l'équation générale deviendra $y^2 - 2 m y + \frac{4}{3} m^2 - \frac{p}{6 m} = 0$.

Si $p = 2 a x^3$ & $m = x^2$, on a $y^2 - 2 x^2 y + \frac{4}{3} x^4 - \frac{a x}{3} = 0$; ou $3 y^2 - 6 x^2 y + 4 x^4 - a x = 0$,

qui représente une ligne du quatrième ordre qui a la propriété demandée. Si $p = 6 a^2$ & $m = x$,

on a $y^2 - 2 x y + \frac{4}{3} x^2 - \frac{a^2}{x} = 0$, ou $3 y^2 x -$

$6 x^2 y + 4 x^3 - a^2 = 0$, équation qui représente une ligne du troisième ordre, qui a aussi la

propriété demandée. Si $m = x^2$ & $p = 6 a^2 x^2$, on aura $y^2 - 2 x^2 y + \frac{4}{3} x^4 - a^2 x^2 = 0$, ou $3 y^2 -$

$6 x^2 y + 4 x^4 - 3 a^2 x^2 = 0$, équation qui peut

il s'agit ici sera $u^2 = \frac{a^2}{g^2} \times (g^2 - z^2)$, ou $u = \pm \frac{a}{g}$

$\times \sqrt{g^2 - z^2}$, en faisant $a d = g$, $a p = z$, $P n = P m = u$. Or en donnant successivement plusieurs valeurs à z , on décrira facilement la Courbe de la manière que nous l'avons enseigné (2); de sorte qu'en menant les ordonnées $P m$, $P n$ correspondantes à chaque abscisse $a P$, l'on aura une Ellipse d'autant plus exacte que les valeurs de u seront plus exactes & les u plus proches les uns des autres.

représenter une Courbe d'un ordre quelconque, & qui jouit de la propriété demandée.

Nous avons supposé dans les Problèmes précédents que les ordonnées étoient parallèles entre elles. Mais si les sécantes de la Courbe doivent partir d'un point que nous appellerons le *pole* de la Courbe, il est nécessaire d'exprimer la nature de la Courbe d'une autre manière que nous n'avons fait jusqu'ici. Soit une ligne fixe bc (fig. 45.) de l'extrémité b de laquelle on tire des lignes bz qui doivent rencontrer la Courbe, il faut exprimer la nature de la Courbe par une équation entre les lignes bm (z) & une quantité dépendante de l'angle variable $mbc = q$, comme seroit $\sin. q$, $\cos. q$, $\tan. q$, &c.

78. Nous allons donner une méthode par laquelle faisant les coordonnées perpendiculaires $bp = x$ & $pm = y$, de l'équation entre z & q on peut tirer l'équation entre y & x & réciproquement. Le triangle rectangle bpm donne $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Le même triangle (en faisant le rayon $= r$) donne $\sqrt{x^2 + y^2} : y :: r : \sin. q$; donc $\frac{\sin. q}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ (A). Il est visible encore que $\cos. q : r :: x : \sqrt{x^2 + y^2}$; donc $\frac{\cos. q}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ (B). Le même triangle donne x :

$y :: r : \tan. q$ & $\frac{\tan. q}{r} = \frac{y}{x}$. Pour les quantités dépendantes de z & de q , substituez leurs valeurs en x & y , & de l'équation entre z & q vous passerez à l'équation entre x & y . Si dans l'équation A vous substituez z à la place de $\sqrt{x^2 + y^2}$, vous

aurez (en multipliant par z) $y = \frac{\sin. q. z}{r}$. Faisant la même substitution dans l'équation B, & multipliant ensuite par z , on aura $x = \frac{z \cos. q}{r}$. Substituant ces valeurs de x & de y dans l'équation entre x & y , vous aurez l'équation entre z & q .

Si la propriété demandée exige deux secantes bm , bn , situées sur la même ligne, on prendra l'équation du second degré $z^2 - 2mz + n = 0$ (D), dans laquelle m & n sont censées être données par l'angle q , commun aux deux secantes, on déterminera ensuite m , ou n par la propriété demandée.

79. PROBLÈME. Trouver la Courbe dans laquelle le produit de deux sécantes bm , bn , situées sur la même ligne & tirées d'un même point b jusqu'à la rencontre de la Courbe, est une quantité constante $= a^2$. Puisque le produit des racines d'une équation du second degré est égal au dernier terme, on aura $n = a^2$; donc l'équation générale D deviendra $z^2 - 2mz + a^2 = 0$. Si l'on suppose $m = \frac{b \cos. q}{r}$, on aura $z^2 - \frac{2b \cos. q. z}{r} + a^2 = 0$.

Si dans cette équation on substitue $\sqrt{(x^2 + y^2)}$ à la place de z & $\frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}$ au lieu de $\frac{\cos. q}{r}$, elle deviendra $x^2 + y^2 - 2bx + a^2 = 0$. Pour construire cette équation prenez $bc = b$ & $cd = \sqrt{(b^2 - a^2)}$. Du point c pris pour centre avec le rayon cd , décrivez un cercle & vous aurez la Courbe demandée. En effet $bd = b - \sqrt{(b^2 - a^2)}$ & $bf = b + \sqrt{(b^2 - a^2)}$; or par la propriété

du cercle (voyez la Géométrie) $bm \times bn = bf \times bd = (b + \sqrt{b^2 - a^2}) \times (b - \sqrt{b^2 - a^2}) = a^2$; donc la Courbe cherchée est un cercle.

80. PROBLÈME. Trouver la Courbe dans laquelle la somme des deux sécantes $bm + bn$ est une quantité constante $= 2a$. Parce que le coefficient du second terme d'une équation pris avec un signe contraire est égal à la somme des racines, on aura $2m = 2a$ & $m = a$; donc l'équation D deviendra $\zeta^2 - 2a\zeta + n = 0$. Si $n = \frac{a \cdot b \cdot r}{\text{cof. } q}$; à

cause de $\frac{\text{cof. } q}{r} = \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} (78)$, on aura $\frac{r}{\text{cof. } q} = \frac{\sqrt{(x^2 + y^2)}}{x}$. Substituant les valeurs de $\frac{r}{\text{cof. } q}$ & de ζ , l'équation deviendra $x^2 + y^2 - 2a\sqrt{(x^2 + y^2)} + \frac{a \cdot b \cdot \sqrt{(x^2 + y^2)}}{x} = 0$, ou $x^2 + y^2 - (2ax - ab) \frac{\sqrt{(x^2 + y^2)}}{x} = 0$, ou $x^2 + y^2 = a \cdot (2x - b) \cdot \frac{\sqrt{(x^2 + y^2)}}{x}$.

ou $(x^2 + y^2)^2 = a^2 \cdot (2x - b)^2 \cdot \frac{(x^2 + y^2)}{x^2}$, ou (multipliant par x^2 & divisant par $x^2 + y^2$) $x^4 + x^2 y^2 = a^2 \cdot (2x - b)^2$, équation qui appartient à une ligne du quatrième ordre.

81. PROBLÈME. Trouver une Courbe dans laquelle la somme des quarrés de deux sécantes bm, bn soit $= p$, p étant une fonction quelconque dépendante de q , ou une quantité constante. Les racines de l'équation D sont $\zeta = m + \sqrt{(m^2 - n)}$, $\zeta = m - \sqrt{(m^2 - n)}$, la somme de leurs quarrés est $4m^2 - 2n = p$; donc $n = 2m^2 - \frac{p}{2}$;

& l'équation D devient $\zeta^2 - 2m\zeta + 2m^2 - \frac{p}{2} = 0$.

Si p & m sont supposés des quantités constantes, l'équation, qui après l'élimination de ζ sera du quatrième degré, appartiendra à un ou deux cercles. Pour le prouver, disposons l'équation de cette manière, $\zeta^2 - 2m\zeta + m^2 = \frac{p}{2} - m^2$. Prenant la racine quarrée de part & d'autre, il

vient $z - m = \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2} - m^2\right)}$. Si $\frac{p}{2} = m^2$, alors $z - m = 0$, ou $z = m$; donc $m = \sqrt{x^2 + y^2}$ & $m^2 = x^2 + y^2$, ou $y^2 = m^2 - x^2$, équation à un cercle dont le rayon $= m$; dans ce cas les z partent du centre, ce qui est évident : car alors l'une & l'autre sécante est $= m$, & la somme de leurs quarrés est $2m^2 = p$. Si $\frac{p}{2} < m^2$, la Courbe est imaginaire. Mais si $\frac{p}{2} > m^2$, si, par exemple, $\frac{p}{2} = 5m^2$, alors $z - m = \pm 2m$ & $z = m \pm 2m$, ou $\sqrt{(x^2 + y^2)} = m \pm 2m$, équation qui appartient à deux cercles, dont l'un a $3m$ pour rayon, tandis que le rayon de l'autre est $= -m$. Décrivez donc deux cercles concentriques (fig. 46), dont le rayon bf de l'un soit $= 3m$ & le rayon bg de l'autre $= m$, & menez par le centre b les sécantes nbn , fbg qui rencontrent les deux cercles. Mais quelles sont les sécantes cherchées, dont la somme des quarrés $= p = 10.m^2$. Si vous prenez les sécantes qui aboutissent à la circonférence d'un même cercle, vous verrez que la somme de leurs quarrés ne peut donner la quantité p : car $nb = 3m = bn$; donc $(bn)^2 + (bn)^2 = 18.m^2$; mais $bm = bM = m$; donc $(bm)^2 + (bM)^2 = 2.m^2$. Il est facile de voir que $(bm)^2 + (bn)^2 = m^2 + 9.m^2 = 10.m^2$; ainsi il faut prendre les sécantes qui aboutissent aux circonférences des deux cercles.

Si on suppose $p = 4a^2$ & $m = \frac{a \cdot \sin. q}{r}$, l'équation D. deviendra, en substituant la valeur de n & celle de m , $z^2 - 2az \cdot \frac{\sin. q}{r} + \frac{2a^2 \cdot (\sin. q)^2}{r^2} - 2a^2 = 0$. Mais $(\sin. q)^2 = r^2 - (\cos. q)^2$. Substituant cette valeur de $(\sin. q)^2$ & réduisant, la dernière équation devient $z^2 - 2az \cdot \frac{\sin. q}{r} - \frac{2a^2 \cdot (\cos. q)^2}{r^2} = 0$. Passant ensuite à l'équation entre x & y , on trouve $(x^2 + y^2)^2 - 2ay \cdot (x^2 + y^2) - 2a^2 x^2 = 0$, équation à une ligne du quatrième ordre, qui jouit de la propriété que la somme des quarrés de deux sécantes est égale à une quantité constante $4a^2$.

Des Courbes semblables.

32. Dans toute équation à une ligne Courbe, entre les coordonnées perpendiculaires x & y , il doit se trouver une ou plusieurs quantités constantes, telles que a, b, c , qui désignent des lignes constantes, & qui avec les variables x & y forment par-tout des termes de la même dimension : car si dans un terme on a un produit de trois lignes multipliées les unes par les autres, il est nécessaire que chacun des autres termes contienne un produit de trois lignes ni plus ni moins, autrement il faudroit comparer un produit de trois lignes avec un produit de deux lignes, par exemple, ou de 5, ou de 6, &c. ce qui ne peut se faire, parce que ce sont des quantités hétérogènes. Il peut cependant arriver qu'on ait fait une ou plusieurs lignes égales à l'unité, ou qu'une ligne constante soit exprimée par un nombre différent de l'unité : comme, par exemple, si on exprimoit une ligne de trois pieds par le nombre 3. De-là il suit que si l'on avoit une équation rationnelle telle que $x^m + b x^{m-1} y + c x^{m-2} y^2 + \dots + a y^m = 0$; en supposant que tous les coefficients b, c , &c. sont des nombres, & que tous les termes considérés par rapport à x & y sont homogènes, c'est-à-dire de même dimension, l'équation seroit composée de m facteurs de la forme $x - p y = 0$, p étant un nombre réel ou imaginaire; or l'équation $x - p y = 0$, est à la ligne droite (7), & cette ligne sera imaginaire si p est imaginaire. Si l'on avoit $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 0$, ou $(x+y)^3 = 0$, il est visible que l'équation renfermeroit trois lignes droites, dont chacune seroit exprimée par l'équation $x + y = 0$, ou $x = -y$, de plus ces lignes tomberoient toutes les unes sur les autres. En général une équation entre x & y , dont tous les termes sont homogènes, & qui ne contient aucune ligne constante exprimée ou sous-entendue, ne peut appartenir à une ligne courbe, mais elle représente tout au plus un assemblage ou système de lignes droites.

Supposons qu'une équation entre x & y contienne une seule ligne constante a , de sorte que les lignes a, x, y donnent par-tout des termes homogènes. Dans ce cas, selon

les différentes valeurs de a , l'équation représentera des Courbes, qui ne différeront qu'en quantité, mais qui du reste seront en tout semblables. Ainsi toutes les lignes courbes qui se trouvent dans ce cas sont censées semblables. Tels sont les cercles qui ne diffèrent qu'en grandeur à cause de leurs rayons plus grands ou plus petits.

Pour rendre ceci plus clair, soit l'équation $y^2 + ax = 2ax = 0$ (A), qui se trouve dans le cas dont nous venons de parler. Appellons la constante a le paramètre de la Courbe désignée par cette équation, & soit supposée $A \equiv s$ (fig. 47), AMB la Courbe de l'équation A, en prenant AB pour l'axe des abscisses & faisant $AP = x$, $PM = y$. Supposons maintenant que le paramètre devienne ag (fig. 48), agb étant la Courbe que l'équation représente dans cette supposition, les Courbes AMB , agb seront semblables : car supposant $ag = \frac{a}{n}$ & prenant $ah = \frac{AP}{n} =$

$\frac{x}{n}$, $hq = \frac{PM}{n} = \frac{y}{n}$, si à la place de a , x , y on

écrit respectivement $\frac{a}{n}$, $\frac{x}{n}$, $\frac{y}{n}$, tous les termes de l'équation se trouveront divisés par nn , & en faisant disparaître le diviseur, on aura la même équation A que ci-dessus.

33. Les Courbes semblables auront cette propriété qu'en prenant les abscisses AP , ah en raison des paramètres, les ordonnées correspondantes seront aussi en raison des paramètres & par conséquent proportionnelles aux abscisses.

Les lignes semblablement tirées, les tangentes, sous-tangentes, les normales & sous-normales, les Courbes osculatrices aux points correspondants, les arcs semblables (c'est-à-dire correspondants aux abscisses AP , ah , proportionnelles aux paramètres) seront des lignes dans le même rapport que les paramètres, & les aires correspondantes aux abscisses AP , ah seront en raison doublée des paramètres.

Il est visible que tous les cercles sont des Courbes semblables étant représentés par l'équation $2ax - x^2 = y^2$. De même toutes les paraboles vulgaires, représentées par

par l'équation $ax = y^2$, sont des Courbes semblables.

84. PROBLÈME. *Etant donnée une Courbe AMB (fig. 47), en trouver une autre aqb (fig. 48) qui lui soit semblable.* Supposons qu'on demande que les abscisses AP (x) soient aux abscisses ah (p) comme 1 : n , & que l'angle des coordonnées soit droit. Faites 1 : $n :: AP : ah = p$ & vous aurez le point h situé sur l'axe ahb , de la même manière que le point P l'est sur l'axe APB . Faites de même 1 : $n :: PM (y) : q$. Prenez $hq = q$, la Courbe cherchée passera par le point q . L'on trouvera de même tant d'autres points que l'on voudra, qui appartiendront tous à la Courbe aqb , semblable à la Courbe AMB. Pour avoir l'équation à la Courbe aqb dont les coordonnées ah , hq sont représentées par p & q , on remarquera que 1 : $n :: AP (x) : p$, & que 1 : $n :: PM (y) : q$; donc $x = \frac{p}{n}$ & $y = \frac{q}{n}$.

Substituant ces valeurs dans l'équation entre x & y , on aura l'équation entre p & q . Cette équation contiendra des fractions, dont le dénominateur sera quelque puissance de n . Si l'on ôte les fractions & que les quantités n , p , q soient regardées seules comme déterminant les dimensions de chaque terme, le nombre des dimensions sera le même dans chaque terme. C'est par là qu'on peut facilement reconnoître ces sortes de Courbes.

Soit $y^2 = 2ax - x^2$, équation à un cercle, dont le diamètre = $2a$. Si on substitue $\frac{p}{n}$ à la place de x , & $\frac{q}{n}$ à la place de y , on a $\frac{q^2}{n^2} = \frac{2ap}{n} - \frac{p^2}{n^2}$, ou $q^2 = 2anp - p^2$, équation au cercle, dont le diamètre est = $2na$; donc tous les cercles sont des Courbes semblables.

Soit $y^2 = ax$. Substituant $\frac{q}{n}$ à la place de y , & $\frac{p}{n}$ à la place de x , on a $\frac{q^2}{n^2} = \frac{ap}{n}$, ou $q^2 = nap$, équation à une parabole, dont le paramètre = na ; donc toutes les paraboles vulgaires sont des Courbes semblables.

R R R R R. Quoique nous ayons dit que le nombre

des dimensions dans chaque terme d'une équation à une Courbe, doit être partout le même, néanmoins il peut se faire qu'il paroisse différent. Par exemple, nous avons trouvé que l'équation à la parabole étant $ax = y^2$, l'équation à toutes les Courbes semblables étoit $q^2 = naxp$; or le second terme paroît avoir trois dimensions, tandis que le premier n'en a que deux. Cela vient de ce que la lettre n désigne un nombre & non une ligne. S'il arrive que le nombre des dimensions d'un terme soit trop petit, il faudra supposer ce terme multiplié autant de fois qu'il sera nécessaire par une ligne qu'on fera $= 1$. Si le nombre des dimensions est trop grand, on supposera ce terme divisé autant de fois qu'il est nécessaire par la ligne $= 1$, ou bien on supposera qu'une ou plusieurs lettres représentent des nombres.

Des intersections des Lignes algébriques.

85. Si une ligne droite an (fig. 49) coupe une Courbe dmn aux points m & n , il est visible qu'en prenant aq pour l'axe, & a pour l'origine des abscisses, les ordonnées pm , qn qui répondent aux points d'intersection sont communes à la ligne am & à la Courbe dn . Soit la Courbe dmn une parabole, dont le parametre $= p$, faisons $ap = x$, $ad = a$, & par conséquent $dp = x - a$; or l'équation à la parabole donne $p \times dp = y^2$; donc $p.(x - a) = y^2$. Soit le cosinus de l'angle map à son sinus, comme $1 : n$, on aura $1 : n$

$$\begin{aligned} &:: p : pm :: aq : qn, \text{ ou } 1 : n :: x : y = \frac{nx}{1} \\ &= n\alpha; \text{ donc } y^2 = n^2 x^2. \text{ Substituant cette valeur} \\ &\text{dans l'équation à la parabole on a } p.(x - a) = \\ &n^2 x^2, \text{ ou } n^2 x^2 - px = -a.p, \text{ ou } x^2 - \frac{p}{n^2} x + \\ &\frac{p^2}{4n^4} = \frac{p^2 - 4n^4.p.a}{4n^4}; \text{ \& en prenant les racines, } x - \frac{p}{2n^2} \end{aligned}$$

$$= \pm \frac{1}{2n^2} \sqrt{(p^2 - 4a.p.n^4)}, \text{ \& } x = \frac{p \pm \sqrt{(p^2 - 4a.p.n^4)}}{2n^2}$$

Il est évident que les deux valeurs de x indiquent les abscisses aq , ap , correspondantes aux ordonnées communes à la ligne droite an & à la parabole; d'où l'on pourroit conclure, si on ne le savoit d'ailleurs, qu'une ligne droite ne peut couper une parabole qu'en deux points. Si $p^2 < 4a.p.n^4$, ou si $p < 4a.n^4$, les deux valeurs de x étant imaginaires, font voir que la ligne an ne peut couper la parabole. Si $p = 4a.n^4$, les racines de l'équation seront égales, & les points m & n se confondant, la ligne an sera une tangente de la parabole.

Si deux Courbes am , bm (fig. 50), ayant la même origine a & le même axe ap des x , se coupent en m , il est visible qu'à la même abscisse ap il répondra une ordonnée commune pm . Soit amn une parabole dont le parametre $= p$, & dont l'axe ad soit perpendiculaire sur ap . Par la nature de la parabole, en supposant $ag = pm = y$, $ap = x = gm$, on a $x^2 = py$. Soit la Courbe bm une hyperbole équilatère, dont le demi-axe $ab = aB = a$. Par la nature de cette Courbe $x^2 - a^2 = y^2$; or l'équation à la parabole donne $py = x^2$, ou $y = \frac{x^2}{p}$ & $y^2 = \frac{x^4}{p^2}$. Substituant cette valeur dans l'équation à l'hyperbole, on a $x^2 - a^2 = \frac{x^4}{p^2}$, ou $x^4 = p^2 x^2 - p^2 a^2$, $x^4 - p^2 x^2 = -p^2 a^2$. Complétant le premier membre, & prenant ensuite les racines, il vient $x^2 - \frac{p^2}{4} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(p^4 - 4a^2 p^2)}$, ou $x^4 =$

$$= \frac{p^2 \pm \sqrt{(p^4 - 4a^2 p^2)}}{2}, \text{ \& enfin } x = \pm$$

$$\sqrt{\left(\frac{p^2 \pm \sqrt{(p^4 - 4a^2 p^2)}}{2}\right)}. \text{ Si } p^4 > 4a^2 p^2, \text{ ou}$$

si $p^2 > 4a^2$, les quatre racines sont réelles & font voir que la parabole coupe la branche bmn en deux points m & n , & la branche BNM en deux points M & N . Si $p^2 < 4a^2$, ou si $p < 2a$, les quatre racines sont imaginaires, & dans ce cas la parabole ne rencontre jamais l'hyperbole. Si $p = 2a$, il vient $x = \pm \sqrt{\left(\frac{p^2 \pm 0}{2}\right)}$; donc il y

aura deux racines positives égales, & les points m & n se confondant, les deux Courbes se toucheront en m . De plus, à cause de deux racines négatives égales, les points N & M se confondront, de sorte que la parabole touchera encore la branche BM en N ou en M ; car dans ce cas les deux points M & N se confondent.

86. On peut conclure de ce que nous venons de dire, qu'une Courbe, dont l'équation contient y seulement linéaire (c'est-à-dire, la première puissance de y), étant combinée avec une autre Courbe quelconque dans l'équation de laquelle y a plusieurs dimensions, donnera autant d'intersections (on suppose que ces Courbes ont le même axe & la même origine des abscisses & les ordonnées parallèles) que l'équation qui résulte après l'élimination de y , contient des racines réelles.

Soit l'équation $p + qy = 0$, & l'équation $P + Qy + Ry^2 + \dots + ty^m = 0$ (A). Les quantités p, q, P, Q, R , &c. sont des fonctions de x , ou des constantes. Il est visible que toute valeur réelle de x donne une valeur réelle de y dans l'équation $p + qy = 0$, ou $y = -\frac{p}{q}$; donc si l'on substitue

cette valeur de y dans l'équation A, il en résultera une équation en x , dont les racines réelles indiqueront un égal nombre d'intersections réelles. En effet puisqu'aux points d'intersection les ordonnées des deux Courbes sont égales, l'ordonnée de la première Courbe sera égale à l'ordonnée de la seconde courbe; mais l'ordonnée de la première Courbe est toujours réelle pour chaque valeur réelle de x ; donc aux points d'intersection indiqués par les racines réelles de l'équation en x , l'ordonnée de la seconde Courbe ne peut être imaginaire : c'est-à-dire, que les points d'intersection seront réels & non imaginaires; autrement un y réel de la première équation seroit égal à un y imaginaire de la seconde, ce qui est absurde.

87. Mais on ne peut pas dire la même chose d'une équation $p + qy + ry^2 = 0$ (B) qui contient le carré de y : car cette équation peut être telle qu'en substituant une certaine valeur de x dans les quantités p, q, r (si une de ces quantités ne contenoit point x , on ne pourroit faire aucune substitution pour celle-là), l'équation qui en résultera donnera deux y imaginaires; donc en substituant dans l'équation A les valeurs de y tirées de l'équation B, il pourra arriver que les deux y égaux, qui dans les deux Courbes répondent à la même abscisse réelle, soient imaginaires; parce que deux quantités imaginaires peuvent être égales entr'elles, aussi-bien que deux quantités réelles; donc dans ce cas à une valeur réelle de x il répondra une intersection imaginaire. Mais si en éliminant les puissances de y au-dessus de la première, on peut parvenir à deux équations qui n'ayant aucun facteur commun, contiennent chacune y seulement linéaire, il ne pourra jamais arriver que les y égaux soient

imaginaires. Si l'on ne peut parvenir à une telle équation, on ne sera pas sûr d'avoir autant d'intersections réelles que l'équation en x aura des racines réelles.

Soit la ligne du troisième ordre représentée par l'équation $y^3 - 3ay^2 + 2a^2y - 6ax^2 = 0$ (F). A chaque abscisse réelle de cette Courbe il répond au moins une ordonnée réelle, & même trois si $x < \frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}$. Si on combine cette Courbe avec la parabole de l'équation $y^2 = 2ax$, en substituant la valeur de y^2 , on aura $2axy - 6a^2x + 2a^2y - 6ax^2 = 0$ (H); d'où l'on tire $y = \frac{6a^2x + 6ax^2}{2a^2 + 2ax} = 3x$. Mais parce que l'équation H est divisible par $y - 3x = 0$, si on fait la division, on aura $2a^2 + 2ax = 0$, qui ne contiendra plus de y ; or cette dernière équation donne $x = -a$. Il paroît donc qu'on devoit avoir un point d'intersection réelle correspondant à l'abscisse réelle $x = -a$. Mais la parabole de l'équation $y^2 = 2ax$ n'ayant aucune ordonnée réelle correspondante aux abscisses négatives, il est visible qu'il ne peut y avoir aucune intersection réelle correspondante à l'abscisse $x = -a$. Si on substitue $-a$ à la place de x dans l'équation F, elle devient $y^3 - 3ay^2 + 2a^2y - 6a^3 = 0$, ou $(y - 3a) \times (y^2 + 2a^2) = 0$. Le facteur $y - 3a = 0$ donne une ordonnée réelle $y = 3a$, le facteur $y^2 + 2a^2 = 0$ donne deux racines imaginaires $y = \pm \sqrt{-2a^2}$. Dans la parabole en supposant $x = -a$, on a $y^2 = -2a^2$ & $y = \pm \sqrt{-2a^2}$; donc dans les deux Courbes les deux racines correspondantes à l'abscisse $x = -a$, sont égales & imaginaires. Le facteur $y - 3x = 0$,

donne $y = 3x$. Substituant cette valeur de y dans l'équation à la parabole $y^2 = 2ax$, ou $y^2 - 2ax = 0$, il vient $9x^2 - 2ax = 0$, d'où l'on tire $x = 0$ & $x = \frac{2a}{9}$; il y a donc deux intersections réelles, l'une correspondante à l'abscisse $x = 0$, & l'autre à l'abscisse $x = \frac{2a}{9}$.

Nous avons trouvé des intersections imaginaires quoiqu'en éliminant nous fussions parvenus à l'équation $2axy - 6a^2x + 2a^2y - 6ax^2 = 0$, dans laquelle on trouve x seulement linéaire. Cela vient de ce que cette équation ayant pour diviseur $y + 3x = 0$, après la division on trouve l'équation $2a^2 + 2ax = 0$, qui ne renferme plus y ; de sorte que c'est la même chose que si y ne pouvoit être exprimé par une fonction rationnelle de x ; ainsi toutes les fois qu'on parvient à une équation qui renfermant y seulement linéaire est résoluble en plusieurs facteurs, il faut examiner séparément chaque facteur, parce que l'un des facteurs peut donner des intersections réelles, tandis qu'un autre en donne d'imaginaires.

Si l'on suppose qu'en éliminant on soit parvenu à ces deux équations $(y - ax) \cdot (x^2 + d) = 0$, $(y + bx) \cdot (x^2 + d) \cdot (x - a) = 0$, qui ont un facteur commun $x^2 + d = 0$; ce facteur pourra donner des intersections imaginaires; ainsi qu'il suit de ce que nous venons de dire. Mais si au contraire on parvient aux équations $(y - ax) \cdot (gx^2 + x^d) = 0$, $(y + bx) \cdot x^2 + cx - a = 0$, qu'on suppose n'avoir aucun diviseur commun, il n'est pas possible que deux y égaux soient imaginaires: car ils ne pourroient être des quantités imaginaires égales.

qu'à cause d'un diviseur égal qui se trouveroit dans ces équations ; or ces équations n'ont aucun diviseur commun par supposition ; donc &c. s'il arrive au contraire ou qu'on ne puisse parvenir à deux équations qui contiennent y seulement linéaire , ou que ces équations quoique contenant y seulement linéaire aient un diviseur commun (qui ne soit pas une quantité constante) , on ne sera pas assuré d'avoir autant d'intersections réelles que l'équation en x aura des racines réelles.

88. Quoique dans l'Algebre nous ayons expliqué la méthode d'éliminer les inconnues d'une équation , cependant pour que le Lecteur ne soit pas embarrassé , nous allons faire voir , par un exemple , comment on peut s'y prendre pour parvenir à deux équations qui soient du premier degré par rapport à l'inconnue y .

$$\text{I. } p + qy + ry^2 = 0$$

$$\text{II. } a + by^3 + cy^4 = 0$$

$$\text{III. } ra - pcy^2 + (rb - qc).y^3 = 0$$

$$\text{IV. } r^2a - p.(rb - qc).y + [qqc - qrb - prc].y^2 = 0$$

$$r^2a - p(rb - qc).y + my^2 = 0$$

$$\text{V. } pm - r^2a + [qm + pr.(rb - qc)].y = 0$$

$$s + ny = 0$$

$$\text{VI. } pn + (qn - rs).y = 0.$$

Je prends deux équations dans l'une desquelles y est élevé à la seconde puissance , l'autre contenant la quatrième puissance de la même inconnue y . Multipliant la première par cy^2 , je la retranche de la seconde multipliée par r (on en use ainsi afin que y^4 se trouve dans les deux équations avec des coefficients égaux) , il en résulte la troisième équation. De la troisième équation multipliée par r , je retranche la première multipliée par $(rb - qc).y$ pour avoir la quatrième , qui deviendra plus simple

en supposant que le multiplicateur de y^2 est $= m$. De la première multipliée par m , je retranche la quatrième multipliée par r pour avoir la cinquième, qui deviendra plus simple en faisant $pm - r^3a = s$ & $qm + pr.(rb - qc) = n$. De la première multipliée par n , je retranche la cinquième multipliée par ry pour avoir enfin la sixième. Si dans la cinquième équation n est $= 0$, on aura aussi $s = 0$. L'équation $s = 0$ détermine toutes les valeurs réelles de x . Si on substitue ces valeurs dans la première ou dans la quatrième équation, y sera donné par une équation du second degré, & par conséquent il pourra être imaginaire. Dans ce cas l'équation en x peut avoir plus de racines réelles qu'il n'y a d'intersections réelles. Si l'on n'a pas $n = 0$, examinez si les cinquième & sixième équations ont un diviseur commun; si elles en ont un, à cause que la valeur de x qui résulte de ce facteur égalé à 0, doit être mise dans une équation du second degré par rapport à y , il en pourra résulter des valeurs imaginaires de y . Si ces équations n'ont aucun facteur commun, il y aura autant d'intersections réelles que l'équation en x contiendra de racines réelles.

Ce qu'on vient de dire par rapport à une équation qui renferme y^2 , doit s'entendre des équations qui renferment $y^3 = y^2 \times y$, y^4 ; y^5 , &c. & quand on fait usage des Courbes de ces équations pour avoir le nombre d'intersections réelles, il faut voir si en éliminant on ne peut pas parvenir à deux équations qui n'aient aucun diviseur commun, & qui contiennent y seulement linéaire. Si cela n'arrive pas, on ne peut pas assurer que le nombre des intersections réelles soit égal au nombre des

racines réelles, que contient l'équation en x .

Cependant si l'on est sûr qu'une des équations qui contient y, y^2, y^3 , &c. a toutes les ordonnées correspondantes à une abscisse quelconque réelles, ce qui peut arriver quelquefois, il est inutile de recourir à la marque dont nous venons de parler : car tous les y de cette Courbe étant réels, il n'est pas possible qu'en les égalant à ceux d'une autre Courbe ils deviennent imaginaires ; donc dans ce cas le nombre des points réels d'intersection sera déterminé par les racines réelles de l'équation en x , résultante de l'élimination de y .

De la construction Géométrique des Problèmes & des Equations.

89. Pour appliquer l'Algebre à la solution des *Problèmes Géométriques*, il faut d'abord exprimer par des lettres les lignes inconnues & les connues. On exprimera les lignes connues par les premières lettres de l'alphabet, & les inconnues par les dernières. On peut parvenir ensuite aux équations que l'on tire de la nature du Problème. Pour cela on a besoin quelquefois de beaucoup d'art & de certaines préparations, comme, par exemple, de mener des parallèles, de tirer des perpendiculaires, de faire certains angles, de décrire des cercles. Au reste la propriété des triangles semblables, dont les côtés homologues sont proportionnels, la propriété du triangle rectangle dans lequel le carré de l'hypothénuse est égal à la somme des carrés des autres côtés, les angles constants font d'un très-grand secours dans les questions géométriques. Les équations étant trouvées & résolues, la valeur

des inconnues sera exprimée par des connues. Mais cela ne suffit pas pour la solution, lorsqu'il s'agit d'un Problème géométrique ; il faut encore que cette valeur soit exprimée en lignes, ou en d'autres quantités géométriques.

Pour ce qui regarde les équations du premier degré, on fait que la valeur de l'inconnue se trouve par l'addition, multiplication, soustraction, division des termes. De même la valeur géométrique de l'inconnue se trouve par addition, soustraction, multiplication, division des lignes, ou tout au plus par le moyen d'une troisième ou quatrième proportionnelle. Supposons, par exemple, qu'on propose ce problème ; quelle est la ligne x qui est égale à la somme des lignes a , & c moins la ligne b ? Il est évident que l'on aura $x = a + c - b$; donc si de la ligne $a + c$ on retranche b , le reste donnera la valeur de x . Si $x = \frac{a \cdot b}{c}$, faites $c : a :: b : x$

$= \frac{a \cdot b}{c}$, c'est-à-dire, que la ligne x est quatrième proportionnelle aux lignes c , a , b ; or nous avons vu en Géométrie comment on pouvoit trouver une quatrième proportionnelle à trois lignes ; donc il est aisé d'avoir la valeur de x . Si l'on avoit $b x = a^2$, l'on trouveroit, en divisant par b , $x = \frac{a^2}{b}$;

donc $b : a :: a : x = \frac{a^2}{b}$; c'est-à-dire, que la ligne cherchée est troisième proportionnelle aux lignes b & a ; or il est facile (voyez la Géométrie) d'avoir une troisième proportionnelle à deux lignes. Si $x = \frac{a^2 - b^2}{a - b}$, on aura $x \rightarrow d : a - b :: a + b : x$;

$= \frac{a^2 - b^2}{a - d}$. Soit $x = \frac{ab}{c} + \frac{bd}{n}$; si on fait $\frac{ab}{c} = f$, $\frac{bd}{n} = g$, on aura $x = f + g$; or f est quatrième proportionnelle aux lignes c, a, b & g quatrième proportionnelle aux lignes n, b, d ; donc il est facile d'avoir f & g , & par conséquent x .

Soit $x = \frac{ab + cd}{m + n}$, on demande la valeur de x . Pour résoudre ce Problème, tout consiste, comme on peut le conclure des exemples ci-dessus, à résoudre le numérateur en deux facteurs linéaires, afin de n'avoir qu'à chercher une quatrième proportionnelle. Pour cela il suffit de changer le premier terme ab du numérateur en un autre, dans lequel il se trouve une des lettres du second terme cd , par exemple, c ; or pour cela il n'y a qu'à faire $c : a :: b : f$, c'est-à-dire, prendre f quatrième proportionnelle aux lignes c, a, b , ce qui donne $cf = ab$ & $x = \frac{cf + cd}{m + n}$; donc $m + n : f + d :: c : x = \frac{fc + cd}{m + n} = \frac{ab + cd}{m + n}$.

Soit $x = \frac{fdcn}{abm}$. Cette fraction est égale au produit des quantités $\frac{fd}{a}, \frac{cn}{b}$, en divisant ce produit par m ; donc si l'on fait $\frac{fd}{a} = p$, $\frac{cn}{b} = q$, on aura $x = \frac{pq}{m}$; donc $m : q :: p : x = \frac{pq}{m}$. Si $x = \frac{a^2 + b^2}{c}$, faites $b : a :: a : \frac{a^2}{b} = n$; donc $a^2 = bn$ & $x = \frac{bn + bb}{c}$, ou $c : n + b ::$

$b : x = \frac{bn + bb}{c}$. Soit $x = \frac{abc - dgf}{hk + mn}$. Faites gf

$= ap$, en faisant $a : g :: f : \frac{gf}{a} = p$, d'où l'on tire $gf = ap$. Faites de même $hk = aq$, $mn =$

ar , vous aurez $x = \frac{abc - dap}{aq + ar} = \frac{bc - dp}{q + r}$.

Faites encore $dp = bs$, & vous aurez $x = \frac{bc - bs}{q + r}$; donc $q + r : b :: c - s : x$.

Si l'on avoit $x = \frac{bcd}{m}$, on ne pourroit trouver la valeur de x qu'en supposant qu'une des lettres du numérateur représente un nombre & non une ligne. Car si toutes les lettres du numérateur sont des lignes, le numérateur représentera un solide qui, divisé par une ligne, doit donner une surface & non une ligne*.

90. Venons aux équations du second degré. Soit $x = \sqrt{ab}$, en élevant tout au quarré l'on a $x^2 = ab$; donc $a : x :: x : b$, c'est-à-dire, que pour avoir x il faut prendre une moyenne proportionnelle entre les lignes a & b ; or nous avons appris en Géométrie à trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données. Soit $x = \sqrt{a^2 + b^2}$, prenez deux lignes $ab = a$, $bc = b$ (fig. 51) perpendiculaires l'une à l'autre & tirez ca , le triangle rectangle abc donne $(ac)^2 = x^2 = a^2 + b^2$; donc $x = \sqrt{a^2 + b^2}$; c'est-à-dire, que x est

* En effet un solide résulte de la multiplication de trois lignes les unes par les autres; donc si on divise un tel produit par une ligne, le quotient sera le produit de deux lignes & par conséquent une surface.

l'hypothénuse d'un triangle rectangle, dont les côtés sont a & b .

Soit $x = \sqrt{c^2 - a^2}$. Sur le diamètre $ab = c$, décrivez un demi-cercle acb (fig. 52), & du point b comme centre & de l'intervalle $cb = a$, décrivez un petit arc qui coupe le demi-cercle en c , tirez ac & vous aurez $x = ac = \sqrt{c^2 - a^2}$. En effet, le triangle acb est rectangle en c ; donc $c^2 = (cb)^2 + (ca)^2$ & $(ca)^2 = c^2 - a^2$; donc $ca = \sqrt{c^2 - a^2} = x$.

C'est à ces trois formules générales qu'il faut rapporter toutes les racines quarrées par les méthodes ci-dessus.

Soit $x = \sqrt{\left(\frac{a^3}{b} + cd\right)}$. Faites $\frac{a^2}{b} = f$,

ou $b : a :: a : f = \frac{a^2}{b}$, & vous aurez $x = \sqrt{af + cd}$. Faites $cd = fg$ pour avoir $x = \sqrt{af + fg} = \sqrt{f(a + g)}$; donc x est moyenne proportionnelle entre f & $a + g$, ce qui se rapporte à la première formule. Soit $x = \sqrt{a^2 + bc}$. Faites $b : n :: n : c$, ou $bc = n^2$, & vous aurez $x = \sqrt{a^2 + n^2}$; donc x est l'hypothénuse d'un triangle rectangle, dont les côtés sont a & n .

Soit $x = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2 - n^2}$. Faisant $a^2 + b^2 = f^2$ & $c^2 + n^2 = g^2$ pour avoir $x = \sqrt{f^2 - g^2}$, qui se rapporte à la troisième formule générale. Soit $x = \sqrt{a^2 + \sqrt{b^4 + c^4}}$. Faisons $b^2 = cf$, pour avoir $\sqrt{b^4 + c^4} = \sqrt{c^2 f^2 + c^4} = c\sqrt{f^2 + c^2}$. Faisant encore $\sqrt{f^2 + c^2} = g$, nous trouverons $\sqrt{b^4 + c^4} = cg$ & $x = \sqrt{a^2 + cg} = \sqrt{a^2 + n^2}$, en faisant $cg = n^2$; or nous savons construire $\sqrt{a^2 + n^2}$.

91. Passons maintenant aux équations qui ren-

ferment deux inconnues x & y . On appelle lieu géométrique d'une équation indéterminée, qui contient deux inconnues x & y , une ligne droite ou courbe, dont le rapport des coordonnées est exprimé par cette équation. Si l'on prend la ligne mn (fig. 53) pour l'axe des x , & qu'on appelle les lignes pf , sd , sh , &c. (y), les y positifs étant situés à la gauche, & les négatifs à la droite de la ligne mn , la ligne dq sera le lieu des ordonnées positives correspondantes à la partie cn de l'axe des abscisses, & des ordonnées négatives correspondantes à la partie cm . De même la ligne indéfinie hk sera le lieu des ordonnées négatives correspondantes à cn & des ordonnées positives correspondantes à cm ; de sorte que les lignes dq , hk feront le lieu des y positifs & négatifs de l'équation générale du premier degré

$$y = \frac{ma + mx}{n} \text{ que nous avons appris à construire}$$

(6). Si $x = 0$, le lieu cherché sera une ligne parallèle à l'axe des abscisses, & si $y = 0$, le lieu des x sera une ligne parallèle à l'axe des ordonnées. Comme nous avons suffisamment expliqué tout cela (6), il seroit inutile de nous y arrêter ici.

92. Lorsqu'on a deux équations géométriques du premier degré à deux inconnues, on peut déterminer en lignes finies la valeur de ces inconnues, lorsque cette valeur est finie. Pour le faire voir, soient les deux équations $y = \frac{ax - ab}{n}$,

$$y = \frac{cx - cd}{m}.$$

Cherchons d'abord le lieu de chaque équation. Supposant que le point a est l'origine des x , prenons $ac = b$, $cp = n$, tirons $pf = a$, faisant un angle quelconque p avec mn , menons la ligne dfq & tirons nq parallèle à pf ; les triangles

semblables cpf , cnq donneront $cp : pf :: cn = qn - ca : qn (y)$, ou $n : a :: x - b : y = \frac{ax - ab}{n}$; donc la ligne cq sera le lieu de la

première équation, & les abscisses seront an , & les ordonnées nq . Cherchons maintenant le lieu de la seconde équation, en prenant toujours le point a pour l'origine des x . Soit $ag = d$, $gt = m$. Menons tr parallèle à nq & $= c$, & tirons l'indéfinie gr . Les triangles semblables grt , gob donnent $gt : tr :: gb : bo$; or $gt = m$, $tr = c$, $gb = ab - ag = x - d$, & bo est l'ordonnée y de la seconde équation; donc $m : c :: x - d : \frac{cx - cd}{m} = y$; donc la ligne gr est le lieu de la

seconde équation. Maintenant si la ligne gr coupe la ligne cq , en quelque point q , l'ordonnée qn sera commune aux lieux des deux équations données; donc nq sera déterminée par la rencontre des deux lignes cq , gr . Il en sera de même de x qui sera $= an$; ainsi par le moyen des deux équations du premier degré, on pourra déterminer la valeur géométrique des inconnues y & x .

Pour faire mieux comprendre cette construction, il est bon de faire quelques remarques. Si la raison de $n : a$ est égale à celle de $m : c$, on aura dans les triangles cpf , gtr , on aura, dis-je, $cp : pf :: gt : tr$; or les angles en p & t sont égaux à cause des parallèles tf , tr ; ainsi ces triangles ont deux côtés proportionnels adjacents à un angle égal de part & d'autre, ce qui (voyez la Géométrie) les rend semblables; par conséquent les angles en c & g seront égaux, & les lignes cb , gr parallèles; donc ces lignes ne se rencontrant jamais, on ne pourra pas déterminer

déterminer les lignes x & y , qui, parce que le point q peut être regardé comme infiniment éloigné, à cause que deux parallèles peuvent être censées se rencontrer à l'infini, pourront être regardées comme infinies *. Si les raisons $n : a$, $m : c$ ne sont pas égales, les lieux se rencontreront à la vérité en quelque point q , mais il faut examiner si l'angle egr est plus petit ou plus grand que l'angle pcf . Dans le second cas le point de concours q sera du côté de B , ainsi que le représente la figure. Mais dans le premier cas le point q sera du côté de d .

Si nous supposons $b = d$, on aura $x = b$ & $y = 0$. En effet dans ce cas les points n & q tomberont sur le point c ; or au point c , $x = an$ est $= ac = b^*$ & $nq = y = 0$. C'est aussi ce que l'analyse démontre : car puisque les valeurs de y doivent être égales

au point q , on aura $\frac{ax - ab}{n} = \frac{cx - cb}{m}$, ou $\frac{a}{n} \times$

$$(x - b) = \frac{c}{m} \cdot (x - b), \text{ ou } \left(\frac{a}{n} - \frac{c}{m} \right) \cdot (x - b)$$

$= 0$; donc au moins l'un ou l'autre des facteurs du premier membre doit être $= 0$; mais ce n'est pas le premier, parce que les quantités qui le composent peuvent être prises arbitrairement; donc $x - b = 0$,

* Si l'on conçoit que l'angle rgt diminue de plus en plus, le point q s'éloignera toujours, & lorsque l'angle rgt approchera beaucoup d'être égal à l'angle pcf , les lignes cq , gr étant presque parallèles, se joindront à une distance extrêmement grande, laquelle sera plus grande qu'aucune distance donnée, lorsque les deux angles, dont nous venons de parler, différeront d'une quantité plus petite qu'aucune quantité donnée; ainsi lorsque ces angles seront égaux, la distance sera censée infinie.

ou $x = b$. Maintenant si dans les équations $y = \frac{ax - ab}{n}$, $y = \frac{cx - cd}{m}$, nous substituons b au lieu de x , nous souvenant qu'ici $d = b$, on trouvera par-tout $y = 0$. Il n'est pas difficile de voir ce qui arriveroit si c étoit $= 0$, ou négatif. Enfin puisque deux lignes droites ne peuvent se couper qu'en un point q , il est visible que les lieux $d q$, $g r$ ne peuvent donner qu'une seule valeur de x & de y .

De la résolution des Equations déterminées du second degré.

93. Avant d'entrer en matière, il sera bon de remarquer que l'équation d'un cercle, dont le rayon $= r$, est $y^2 = r^2 - x^2$, ou $y^2 + x^2 = r^2$. Cela posé, prenons l'équation générale du second degré $x^2 + cx = ab$, on peut toujours lui donner cette forme en délivrant le premier terme de son coefficient & faisant passer toutes les quantités qui ne contiennent pas x dans le second membre. Si vous multipliez cette équation par $m^2 + n^2$, vous aurez $m^2 x^2 + n^2 x^2 + (m^2 + n^2).cx = (m^2 + n^2) \times ab$ (Q). Faisons ensuite $nx + \frac{(m^2 + n^2).c}{2n} = my$ (P), ou $y = \frac{n}{m} \cdot x + \frac{(m^2 + n^2).c}{2mn}$; cette équation est évidemment un lieu du premier degré. Quarrant les deux membres de l'équation P & transposant, on a $n^2 x^2 + (m^2 + n^2).cx = m^2 y^2 - \frac{(m^2 + n^2)^2}{4n^2} \cdot c^2$. Substituant le second membre de cette équation dans l'équation Q, à la place du premier qui s'y trouve, nous aurons

$$m^2 x^2 + m^2 y^2 - \frac{(m^2 + n^2)^2}{4n^2} \cdot c^2 = (m^2 + n^2) \cdot a b,$$

ou transposant & divisant par m^2 , $x^2 + y^2 = \frac{(m^2 + n^2)^2 \cdot c^2}{4n^2 m^2} + \frac{(m^2 + n^2)}{m^2} \cdot a b$ (S) ; donc

en multipliant & divisant le dernier terme par $\frac{m^2 + n^2}{4n^2}$, $x^2 + y^2 = \frac{(m^2 + n^2)^2}{4n^2 m^2} \cdot \left(c^2 + \frac{4n^2 \cdot a b}{m^2 + n^2} \right)$,

équation au cercle qui, comparée avec l'équation $y^2 + x^2 = r^2$, donne $r = \frac{(m^2 + n^2)}{2nm} \cdot \sqrt{\left(c^2 + \frac{4n^2 a b}{m^2 + n^2} \right)}$;

donc en décrivant un cercle $b g d q$ (fig. 54) avec le rayon r que nous venons de trouver, on aura le lieu de la dernière équation, dont les abscisses, en les comptant du centre c , sont $c f = x$, & les ordonnées $f g = y$.

Disposons à présent le lieu de l'équation $y = \frac{n}{m} x + \frac{(m^2 + n^2) \cdot c}{2mn}$ (T), en sorte que les x des

deux lieux ayant la même origine, soient situés sur la même ligne. Soit $c a = \frac{(m^2 + n^2) \cdot c}{2nn}$ &

tirons ch perpendiculaire sur bd & telle que l'on ait $m : n :: c a : c h$; menant la ligne $g h a q$ par les points a & h , on aura le lieu demandé qui coupera le cercle en q & g . Si des points g & q on tire les ordonnées $g f$ & $q p$, les abscisses $c f$, $c p$ seront les racines de l'équation proposée. En effet, à cause qu'aux points q & g les y du cercle sont égaux aux y de la ligne $g q$, les x ($c f$, $c p$) doivent être les mêmes pour les deux lieux. De plus si l'on prend la valeur de y dans l'équation T, & qu'on

substitue la valeur de son carré à la place de y^2 dans l'équation S, on trouvera l'équation Q, qui, en divisant par $m^2 + n^2$, se réduit à l'équation proposée.

Si le point a tombe en dedans du cercle, l'équation aura toujours deux racines réelles, parce que dans ce cas la ligne gq coupe le cercle en deux points, desquels si on abaisse des perpendiculaires sur le diamètre, elles détermineront cf , cp , ou les x de l'équation. Si le point a tombe hors du cercle, il peut arriver trois cas, ou la droite ah coupera le cercle, ou elle le touchera, ou bien elle ne le rencontrera point. Dans le premier cas il y aura deux racines réelles; dans le second ces deux racines seront égales, parce qu'alors les deux points de section se confondant, les deux x tombent l'une sur l'autre. Dans le troisième cas, qui suppose $ch > r = cb$, les racines seront imaginaires.

Solution de quelques Problèmes géométriques.

94. PROBLÈME. Etant donnée une droite ab divisée en c , comme on le voudra, on demande de faire le prolongement bp (fig. 55), tel que le carré de cp soit égal au rectangle $ap \times bp$. Soit $ab = a$, $cb = b$, $bp = x$. Par la nature du Problème $ap \times bp = (cp)^2$, ou $(a+x).x = (b+x)^2$, ou $x^2 + ax = x^2 + 2abx + b^2$. Retranchant x^2 de part & d'autre & transposant, il vient

$$ax - 2bx = b^2, \text{ d'où l'on tire } x = \frac{b^2}{a-2b}; \text{ donc}$$

$$a - 2b : b :: b : x = \frac{b^2}{a-2b}. \text{ C'est-à-dire, que } bp$$

est troisième proportionnelle aux lignes $a - 2b$ & b . Pour construire x , prenez $cd = b$, pour avoir $ad = a - 2b$, des points c & b menons les lignes parallèles cl , bh , dont la première soit $= ad$, la seconde $= cb$, tirons lb , & par le point h menons-lui la parallèle hp , cette ligne déterminera la valeur cherchée de x . En effet, les triangles

lcb , phb sont évidemment semblables ; donc $cl : cb :: hb : bp$, ou $a - 2b : b :: b : \frac{b^2}{a - 2b} = x$. Si $b < \frac{a}{2}$, le point d tombera entre a & c , & la construction précédente aura lieu. Si $b = \frac{a}{2}$, le point d tombera sur le point a , ce qui donne $ad = 0$. Donc aussi cl sera $= 0$; le point l tombera sur le point c , lb se confondra avec cb & l'on aura $x = \frac{b^2}{0} = \infty$. Enfin si

$b > \frac{a}{2}$, le point d tombera en-deçà de a , ad sera négatif, & l'on mènera cl du côté opposé, hb étant toujours située de la même façon ; donc hp parallèle à lb , coupera ab prolongée s'il le faut, coupera, dis-je, ab en-deçà de b .

95. PROBLÈME. Inscrive un carré $fdpg$ dans un triangle bac (fig. 56) de manière que l'un de ses côtés tombe sur la base de ce triangle. Supposant la chose faite, du sommet a de l'angle opposé à la base abaissez ah perpendiculaire sur bc . Soit la base $bc = a$, $ah = b$, $hb = df = dp = x$. Les triangles semblables abh , fta , donnent $ah : at :: ab : af$. Les triangles semblables afg , abc donnent $ab : af :: bc : fg = dp$; donc $ah : at :: bc : dp$, ou $b : b - x :: a : x$, *alternando & componendo*, $b + a : a :: b : x$.

Pour construire x , prenez $hm = bc$ & $mn = ah$ pour avoir $hn = a + b$. Ayant tiré an , menez par le point m la ligne mt parallèle à na , cette ligne déterminera le point t de la perpendiculaire ah , par lequel menant fg parallèle à bc , vous aurez le côté fg du carré demandé. En effet, à cause des triangles semblables anh , mth , l'on a $hn : mh :: ah : th$, ou $b + a : a :: b : x$. Si l'angle ach est aigu, la construction précédente a lieu ; si cet angle est droit, le côté gp tombera sur gc . Si l'angle c est obtus (fig. 57) on aura à la vérité un carré $fgdp$, mais non pas inscrit dans le triangle bac .

96. PROBLÈME. Etant donné (fig. 58) un cercle acn & un point b situé hors de ce cercle, du centre p tirant la

ligne bp , rencontrée en b par la ligne db , on demande le point d , auquel du centre p ayant mené la ligne pd , on ait l'inscrite dc en raison donnée avec la ligne $b d$. Soit la raison donnée $m : n$. Par le point p , menez pm parallèle à bd & faites $m : n :: pn : pm$ & menez bm . Par c l'un des points, où bm rencontre le cercle, menez $pc d$ & vous aurez deux points d & b qui détermineront la ligne cherchée bd ; car les triangles semblables pmc , bcd donnent $bc : db :: pc = pn : pm :: m : n$. Si $m = n$, dc sera $= db$ & le point m tombera sur le point n . Si bm devient tangente, les points c & C , par lesquels on doit tirer la ligne pd , se confondront, & dans ce cas le Problème n'aura qu'une solution; c'est-à-dire, qu'un seul point d pourra résoudre le Problème.

97. PROBLÈME. Ayant divisé la ligne ab (fig. 59) en deux parties ac , bc , sur la plus grande ac décrivez un triangle équilatéral agc ; faites la même chose sur la plus petite cb , & joignant les sommets de ces triangles par la ligne gfd prolongée jusqu'à la rencontre de ab , du point d comme centre & de l'intervalle dc décrivez un cercle $*$; on demande de trouver dans la circonférence de ce cercle un point m tel qu'ayant mené ma , mb , l'on ait $ac : bc :: ma : mb$. Cherchons d'abord le rayon dc de ce cercle. Les triangles semblables dag , dfc ** donnent $ag : cf$, ou $ac : cb :: ad : cd$, & dividendo $ac - cb : cb :: ac : cd$; donc faisant $ca = a$, $cb = b$, $dc = r$, on aura $a - b : b :: a : r = \frac{ba}{a-b}$. Soit

présentement la perpendiculaire $pm = y$ & l'abscisse $cp = x$, l'équation au cercle sera $2rx - x^2 = y^2$. Mais par la propriété du triangle rectangle amp , l'on a $am = \sqrt{y^2 + (a+x)^2}$, & le triangle rectangle $m b p$ donne aussi $mb = \sqrt{y^2 + (b-x)^2}$; donc par la nature du Problème $a : b :: \sqrt{y^2 + (a+x)^2} : \sqrt{y^2 + (b-x)^2}$; donc; en quarrant, $a^2 : b^2 :: y^2 + (a+x)^2 : y^2 + (b-x)^2$. Elevant les Binômes au quarré, & substituant la valeur de y^2 prise de l'équation au cercle, en se sou-

* On n'a décrit qu'une partie de la circonférence.

** Car les angles gac , $fc b$ sont chacun de 60 degrés, parce que les triangles auxquels ils appartiennent sont équilatéraux; donc ces angles sont égaux.

venant que $r = \frac{ba}{a-b}$, on aura l'analogie $a^2 : b^2 :: a^2$

$$+ 2ax + x^2 : b^2 - 2bx + x^2 :: a^2 + \frac{2a^2x}{a-b} : b^2$$

$$+ \frac{2abx}{a-b} - x^2 \quad + \frac{2abx}{a-b} - x^2$$

$$+ \frac{2b^2x}{a-b}; \text{ donc alternando, invertendo, dividendo \& en-}$$

core invertendo, $a^2 : \frac{2a^2x}{a-b} :: b^2 : \frac{2b^2x}{a-b}$, ou divisant les

conséquents par 2, ôtant les fractions & divisant les termes de la première raison par a^2 , & ceux de la seconde par b^2 , $a-b : x :: a-b : x$. Cette proportion, étant nécessaire, fait voir que c'est un Théorème & non un Problème; c'est-à-dire, que tous les points de la circonférence cm ont cette propriété.

COROLLAIRE. Donc de tous les points m de la circonférence cm , on verra les lignes ac , cb sous le même angle : car si l'on conçoit que du point m on ait tiré une ligne mc qui partage l'angle amb en deux également; on aura (voyez la Géométrie) $am : bm :: ac : cb$; donc la ligne mc divise l'angle amb en deux également; donc, &c.

98. PROBLÈME. Etant données trois droites ac , cb , bg situées sur la même ligne (fig 60), on demande un point m , duquel ces trois droites soient vues sous le même angle. Ayant joint les points p , f des triangles équilatéraux apc , cfb construits sur les deux premières lignes, du point d , où la ligne pf rencontre ag , & d'un rayon $= dc$, décrivez le cercle cm . Du point k où la droite qui passe par les sommets des triangles équilatéraux décrits sur les deux lignes bg & cb , rencontre ga ; décrivez le cercle bm avec le rayon kb . Par le Théorème précédent & son Corollaire, les lignes ac , cb seront vues sous le même angle de tous les points de l'arc cm ; de même les lignes cb , bg seront vues sous le même angle de tous les points de l'arc bm ; donc du point de concours m de ces deux arcs, les trois lignes doivent être vues sous le même angle. Il est évident qu'il doit y avoir un autre point en-dessous de ag qui a la même propriété. Si les cercles ne

se rencontrent pas, le Problème est impossible.

On peut quelquefois, sans en venir à une équation entre x & y , trouver une solution fort simple d'un Problème qui paroît d'abord assez difficile, comme on va le faire voir dans le Problème suivant.

99. PROBLÈME. *Etant donné un cercle $a n b$ (fig. 61), une corde $a b$, & deux points k & d situés sur cette corde, trouver le point p situé sur la circonférence, d'où tirant les deux lignes $p k n$, $p d m$ & joignant les deux points m , n par la ligne $n m$, on ait la corde $m n$ parallèle à la corde $b a$. Supposons la chose faite, du point n je mène la tangente $n B$ jusqu'à la rencontre de la corde $b a$ prolongée en B . L'angle $B n p$ fait par une corde $n p$ & la tangente $n B$, est $= n m p$, angle appuyé sur l'arc $n B p$; or à cause des parallèles les angles $n m p$, $k d p$ sont correspondants & par conséquent égaux. Cela posé les triangles $p d k$, $b n k$ qui ont les angles en k opposés au sommet, & les angles en n & d égaux sont semblables; donc $B k : p k :: n k : d k$, & $B k \times d k = p k \times n k$. Mais lorsque deux cordes d'un cercle se coupent, les parties de l'une sont réciproques aux parties de l'autre, ainsi que nous l'avons vu dans la Géométrie; donc $p k \times n k = a k \times b k$; donc $B k \times d k = a k \times b k$; ainsi $k d : a k :: b k : B k$. Prenant donc à volonté deux points k & d sur la corde donnée $a b$, on cherchera une quatrième proportionnelle aux trois lignes $d k$, $a k$, $b k$ & l'on aura le point B , duquel on mènera les tangentes $B n$, $N B$ & par le point n la corde $n m$, & le problème sera résolu; le point N peut donner une seconde solution.*

De la construction des équations du second degré à deux inconnues.

100. De ce que nous avons dit ci-dessus (12 & 16), il suit que toute équation du second degré à deux inconnues *, exprime une Section

* Nous ne regardons pas comme équations du second degré, celles qui sont divisibles en facteurs du premier degré, telle est l'équation $a^2 x^2 + 2 a x y b + b^2 y^2 = 0$, ou $(a x + b y) \times (a x + b y) = 0$, telle est encore l'équation $x y = 0$. Ces sortes d'équations, qu'on peut réduire au premier degré par la division, ne représentent qu'un assemblage de lignes droites.

Conique ou ne désigne aucune ligne possible. Les équations aux Sections Coniques sont

$y^2 = \pm ax$. . . à la Parabole, les x sont positifs pour le signe +, & négatifs pour le signe —.

$x^2 = \pm ay$. . . à la Parabole, les x étant pris sur la tangente.

$y^2 = \frac{c^2}{b^2} (b^2 - x^2)$. . à l'Ellipse, dont les demi-diamètres sont b & c , & l'origine des x au centre.

$y^2 = \frac{c^2}{b^2} (2bx - x^2)$. . à l'Ellipse, en comptant les x du sommet du diamètre.

$\left. \begin{aligned} y^2 &= b^2 - x^2 \\ y^2 &= 2bx - x^2 \end{aligned} \right\}$. . aux Diamètres conjugués égaux de l'Ellipse, si l'angle des coordonnées est oblique, & au Cercle, si cet angle est droit.

$\left. \begin{aligned} x^2 &= \frac{c^2}{b^2} (b^2 - y^2) \\ x^2 &= \frac{c^2}{b^2} (2by - y^2) \end{aligned} \right\}$. . à l'Ellipse, les x étant pris sur la tangente qui passe par l'extrémité du diamètre $2b$.

$\left. \begin{aligned} x^2 &= b^2 - y^2 \\ x^2 &= 2by - y^2 \end{aligned} \right\}$. . au Cercle, ou aux Diamètres conjugués égaux de l'Ellipse, selon que l'angle des coordonnées est droit ou oblique.

$\left. \begin{aligned} y^2 &= \frac{c^2}{b^2} (x^2 - b^2) \\ y^2 &= \frac{c^2}{b^2} (2bx + x^2) \end{aligned} \right\}$. . à l'Hyperbole rapportée au diamètre $2b$.

$y^2 = \frac{b^2}{c^2} \cdot (x^2 + c^2)$. . à l'Hyperbole par rapport
au second diamètre $2c$.
(Voy. Sections Coniques,
Coroll. II, n° 52).

$x^2 = \frac{c^2}{b^2} \cdot (y^2 - b^2)$ } à l'Hyperbole les abscisses
 $x^2 = \frac{c^2}{b^2} \cdot (2by + y^2)$ } étant prises sur la tan-
gente.

$y^2 = \frac{c^2}{b^2} \cdot (x^2 - 2bx)$ l'origine des Abscisses
étant supposée au som-
met de l'Hyperbole op-
posée.

$x^2 = \frac{c^2}{b^2} \cdot (y^2 - 2by)$ en prenant dans ce même
cas les x sur la tangente.

$yx = c^2$ à l'Hyperbole par rapport
à ses asymptotes.

Nous allons exposer la méthode de rapporter les équations du second degré à quelqu'une des formules précédentes, ce qui souvent exige de compléter le premier membre de l'équation.

101. EXEMPLE I. *Etant donné l'angle des coordonnées, on propose de construire l'équation $ax + ab = y^2$. A cause de $ax + ab = a \times (x + b)$, faites $x + b = z$; donc, en substituant, $az = y^2$, équation à la parabole. Sur le diamètre am (fig. 62) avec le paramètre $= a$, décrivez la parabole $c a n$, dont les coordonnées ap , pc fassent entr'elles l'angle donné, ap sera $= z$ & $cp = y$; mais $x = z - b$; donc prenant $ad = b$, les dp seront $= x = z - b$. Ainsi le point d sera l'origine des x qui seront positifs du côté de m , & négatifs du côté de a . Si l'équation avoit été $ax - ab = y^2$, on auroit fait $x - b = z$, & par conséquent*

$x = z + b$; donc prenant $ag = b$, les x commenceroient en g .

102 EXEMPLE II. On propose de construire l'équation $xy + ax = a^2 - ay$. Faites d'abord $y + a = z$, ou $y = z - a$ pour avoir $zx = 2a^2 - az$, ou en transposant, $zx + az = 2a^2$. Faites ensuite $x + a = p$, vous aurez $zp = 2a^2 = c^2$, en faisant $2a : c :: c : a$; or l'équation $zp = c^2$ appartient à l'hyperbole rapportée aux asymptotes. Pour la construire tirez sous l'angle donné, ou sous un angle quelconque si cet angle n'est pas donné, les lignes Mm , Nn (fig. 63), prenez $ca = a$, $ab = 2a$, & entre les asymptotes Mm , Nn décrivez une hyperbole qui passe par le point b (ce qu'on peut faire par la méthode que nous avons enseignée dans les Sections Coniques), les cf seront $= p$, & les $fg = z$; mais $x = p - a = cf - ac$; donc les x commencent en a . A cause de $y = z - a$, divisez $ab = 2a$ en deux parties égales en d , & par ce point menez dh parallèle à nn , & vous aurez $hg = z - a = y$. Puisque $dh = af$, l'on aura les $x = dh$, & les $y = gh$. Si $x = 0$, on aura $y = db = a$. Si x est positif & plus petit que a , les ordonnées sont positives. Si $x = a$, l'on aura $y = 0$: car $p = x + a = 2a$ dans ce cas; donc $z = \frac{2a^2}{p} = \frac{2a^2}{2a} = a$, mais $y = z - a = a - a = 0$, dans ce cas. Si $x > a$, les ordonnées sont négatives, & en supposant $x = \infty$, y est négatif & $= -a$. Si x est négatif & plus petit que a , les ordonnées sont positives. Si x négatif est $= -a$, l'ordonnée y est infinie.

Si l'équation étoit $xy + ax = ay - a^2$, en fai-

fant $y + a = z$, $x - a = p$, on auroit $pz = -2a^2$. C'est pourquoi prenant $ca = a$, on prendroit $ap = 2a$, du côté des ordonnées négatives, & les coordonnées seroient dh & hi .

Nous avons supposé jusqu'ici que les constantes permettent des substitutions convenables ; si elles étoient plus composées, il faudroit les ramener à des expressions plus simples. Soit l'équation $a^2 - bx = y^2$, faites premièrement $a^2 = bc$, vous aurez $b.(c - x) = y^2$, faites ensuite $c - x = z$, pour avoir $bz = y^2$, équation à la parabole. De même dans l'équation $a \frac{dd}{m} + bx = y^2$, faites

$dd = bf$ pour avoir $\frac{b.(af)}{m} + bx = y^2$, cette équation se réduira à la précédente, en faisant $\frac{af}{m} + x = z$. Dans l'équation $\frac{a^2x - b^2x + n^3}{a + b} = y^2$, supposez $n^3 = (aa - bb).c$, pour avoir $(a - b).x + (a - b).c = y^2$, enfin supposez $x + c = z$ & $a - b = d$, pour avoir $dz = y^2$, équation à la parabole. Dans l'équation $xy + ax = dd - cy$, servons-nous de la substitution $y + a = z$, pour avoir, en transposant, $xz + cz = dd + ac$. Supposons ensuite $x + c = p$ & $d^2 = af$, il viendra $pz = a.f + ac = ab$, en faisant $f + c = b$; or l'équation $pz = ab$ appartient à l'hyperbole.

* 103. EXEMPLE III. Soit l'équation $x^2 + 2ax = y.(a + b)$, * complétez le premier membre

* Ou $x^2 + cx = y$, en représentant $2a$ par c & $a + b$ par 1 .

pour avoir $x^2 + 2ax + a^2 = y \cdot (a + b) + a^2$,
 faites $x + a = p$, vous aurez $p^2 = (a + b) \times$
 $\left(\frac{a^2}{a + b} + y\right)$. Faites encore $\frac{a^2}{a + b} + y = z$, &c
 vous aurez l'équation à la parabole $p^2 = z \cdot (a + b)$.
 Avec le parametre $a + b$ (fig. 64) décrivez la
 parabole ag , dont la tangente à l'origine du dia-
 metre qui passe par le point a soit af^* ; les af
 seront $= p$ & les $gf = z$. Mais $p - a = x$; donc
 coupant $ac = a$, les cf seront $= x$. De même
 puisque $y = z - \frac{a^2}{a + b}$, &c que par la nature de
 la parabole, $dc = \frac{a^2}{a + b}$, en menant par le point
 d la ligne hd parallèle à fa , on aura $dh = cf = x$,
 & $gh = y$.

104. EXEMPLE IV. Supposons que l'équation con-
 tienne les quarrés des deux inconnues, comme l'équa-
 tion $x^2 + ax = 2y^2 - 2by$. Complétant le premier
 membre, & faisant ensuite $x + \frac{a}{2} = p$, on aura
 $p^2 = 2y^2 - 2by + \frac{a^2}{4}$, ou $p^2 - \frac{a^2}{4} = 2y^2 -$
 $2by$, ou en divisant par 2, complétant le second
 membre, & faisant ensuite $y - \frac{b}{2} = z$, $\frac{p^2}{2} - \frac{a^2}{8}$
 $+ \frac{b^2}{4} = z^2$. Il peut arriver trois cas (fig. 65);
 dans le premier on supposera $a^2 = 2b^2$, dans ce
 cas l'équation devient $\frac{p^2}{2} = z^2$, $p^2 = 2z^2$, ou

* Si l'angle des coordonnées est droit, le point a sera
 l'origine de l'axe de la parabole.

$p = \pm \sqrt{2}$; d'où l'on tire $p : \sqrt{2} :: \sqrt{2} : 1 :: \sqrt{(2b^2)} : b :: a : b$ (à cause de $2b^2 = a^2$) $:: \frac{a}{2} : \frac{b}{2}$. Soit $ca = \frac{a}{2}$, tirez $ba = \frac{b}{2} = ad$, menez les lignes indéfinies cb, cd , l'on aura les $cf = p$, les $fg = \sqrt{2}$. Mais $y = \sqrt{2} + \frac{b}{2}$; donc menant par le point d la ligne hd parallèle à fa , les hg seront $\sqrt{2}$. De même $x = p - \frac{a}{2}$; donc les $dh = af$ seront x , & dans ce cas l'équation appartient aux lignes droites cg, cd . Si $a^2 > 2b^2$, supposons $a^2 - 2b^2 = m^2$, pour avoir $\frac{p^2}{2} - \frac{m^2}{8} = \sqrt{2}^2$, ou $p^2 - \frac{m^2}{4} = 2\sqrt{2}^2$; donc $p^2 - \frac{m^2}{4} : \sqrt{2}^2 :: 2 : 1 :: \frac{m^2}{4} : \frac{m^2}{8}$. Cette proportion appartient à une hyperbole par rapport à deux diamètres $m, \frac{m}{\sqrt{2}}$. Prenant les demi-diamètres $cn = \frac{m}{2}, cm = \frac{m}{2\sqrt{2}}$ (fig. 66), décrivez sur cnf l'hyperbole ng , on aura les $cf = p$, & les $fg = \sqrt{2}$. Coupez $ca = \frac{a}{2}$, vous aurez $af = p - \frac{a}{2} = x$. Menez ad parallèle à cm & dh parallèle à cf , faites $ad = \frac{b}{2}$ & vous aurez $hg = \sqrt{2} + \frac{b}{2} = y$; donc les coordonnées de l'équation proposée seront $dh = af = x$, & $gh = y$.

Enfin si $a^2 < 2b^2$, faites $2b^2 - a^2 = m^2$ pour avoir $\frac{p^2}{2} + \frac{m^2}{8} = \zeta^2$, ou $p^2 + \frac{m^2}{4} = 2\zeta^2$; donc $p^2 + \frac{m^2}{4} : \zeta^2 :: 2 : 1 :: \frac{m^2}{4} : \frac{m^2}{8}$. Faisant le second demi-diametre cm (ou le second demi-axe si l'angle des coordonnées est droit) $= \frac{m}{2}$, le premier demi-diametre $cn = \frac{m}{2\sqrt{2}}$, décrivez l'hyperbole ng (fig. 67), les cf seront $= p$, les $fg = \zeta$; donc ayant pris $ca = \frac{a}{2}$, $ad = \frac{b}{2}$ & parallèle à cn , menant dh parallèle à cf , les af seront $= x$ & les $hg = y$; ainsi dans ce cas l'équation est à l'hyperbole rapportée à un second diametre *.

105. On peut voir par les Exemples précédents que tout se réduit à substituer une inconnue à la place d'une autre inconnue, jointe à une constante positive ou négative, & qu'on a souvent besoin de compléter un membre de l'équation. Après avoir trouvé la Courbe que donnent les substitutions, il faut rétrograder pour déterminer les x & les y , c'est-à-dire, les coordonnées de l'équation proposée. Comme cette méthode est quelquefois compliquée pour les équations qui, contenant un des quarrés x^2 , ou y^2 , ou tous les deux, contiennent encore le rectangle xy , nous emploie-

* Sous le nom de diametre, nous comprenons les axes qui ne diffèrent des diametres qu'en ce que l'angle des coordonnées, par rapport à ces derniers, est oblique, tandis qu'il est droit par rapport aux premiers.

rons pour ces sortes d'équations la méthode des *indéterminées*, en nous servant d'un artifice qui rend la construction facile. Pour cela je dispose l'équation de telle manière que tous les y se trouvent d'un côté, le terme où se trouve y^2 étant positif & sans coefficient; ajoutant ensuite de part & d'autre le carré de la moitié du coefficient de y , le premier membre sera un carré parfait, dont je fais la racine $= z$. Ayant fait la substitution, je trouve une équation qui ne contient pas le plan zx . Si je construis la Courbe des indéterminées z & x , & qu'en rappelant les substitutions je détermine y , les y ne se termineront pas à la ligne des x , mais à une ligne dont les abscisses seront aux abscisses x en raison donnée. C'est pourquoi je construis l'équation en prenant mx & non x pour les abscisses (m est une quantité qu'on déterminera dans la suite) & z pour les ordonnées. Cela posé, je tire par l'origine des mx une ligne qui fasse avec les mx , un angle tel qu'en ajoutant à z ou retranchant de z la quantité qu'indique le Calcul, je puisse déterminer y , en ajoutant ou retranchant, s'il le faut, une constante. Enfin, je déterminerai la valeur de m , aussi bien que la grandeur des angles qui doivent avoir lieu, pour que les lignes x & y fassent entr'elles un angle donné.

106. EXEMPLE V. Soit l'équation $y^2 - 2ay + 2xy = a^2 + 4ax - x^2$. J'ajoute de chaque côté le carré de $x - a$, moitié du coefficient de y , pour avoir $(y - a + x)^2 = 2a^2 + 2ax$. Je fais $y - a + x = z$, il vient $z^2 = (x + a).2a$, équation à la parabole. Mais on doit construire la Courbe de telle sorte que les abscisses soient mx & non x . C'est pourquoi, en conservant l'égalité, je dispose

dispose ainsi l'équation : $z^2 = \frac{2a}{m} \cdot (ma + mx)$,

Supposons qu'avec le parametre $\frac{2a}{m}$, on décrive sur le diametre af (fig. 68) la parabole ai , dont les abscisses soient $af = ma + mx$ & les ordonnées fhi (paralleles à la tangente ab) $= z$. Prenons $ac = ma$, nous aurons $cf = mx$. Pour trouver $y = z + a - x$, prolongez ba en d , en sorte que $ad = a$, menez dg parallele à fa , & prolongeant if jusqu'à la rencontre de gd , vous aurez $mg = cf = mx$, & $gi = z + a$. De $z + a$ retranchant x , il restera la valeur de y . Supposons qu'on ait mené la ligne mh , de maniere que l'interceptée $gh = x$, on aura $hi = gi - gh = z + a - x = y$. Afin que les y se terminent à la ligne des x , il est nécessaire que l'on ait $mh = x$. Il faut donc trouver une valeur de m telle que l'on ait $gh = mh = x$, l'angle mhg étant donné. Faisons le triangle rts dont l'angle s soit égal à l'angle donné des x & des y , c'est-à-dire $= mhg$, & dont les côtés sr , st soient égaux entr'eux. Je suppose chacun de ces derniers côtés $= a$, & je fais le troisieme côté $rt = c$. Cela posé, les triangles semblables srt , hmg donneront $a : c :: x : mx :: 1 : m$; donc $m = \frac{c}{a}$; donc le parametre $ab = \frac{2a}{m} = \frac{2a^2}{c}$ & la ligne $ca = dm = ma = c$. Puisque l'angle $mgh = t$, l'angle baf fera le supplément de l'angle t , parce que les angles g & afi sont égaux; or baf est supplément de $fad = afi$. C'est pourquoi sur le diametre af avec un parametre $ab = \frac{2a^2}{c}$,

& sous l'angle baf supplément de l'angle t , on décrira la parabole ai , on prendra $da = a$, menant dg parallèle à fa , sur dg on coupera $dm = c$, tirant mh de telle sorte que l'angle gmh soit $= t = r$, on aura $mh = x$, $hi = y$. Si les x & les y doivent faire un angle droit, on aura $m = \sqrt{2}$.

107. EXEMPLE VI. Soit l'équation convenablement ordonnée $y^2 - xy = a^2 - x^2$. Complétant le premier membre, faisant ensuite $y - \frac{x}{2} = z$,

il vient $z^2 = a^2 - x^2 + \frac{x^2}{4}$, ou $z^2 = a^2 - \frac{3}{4}x^2$, équation à l'Ellipse. Pour faire que les coordonnées soient mx & z , multipliant l'équation par m^2 & la divisant par $\frac{3}{4}$, je lui donne cette forme $\frac{4m^2z^2}{3} = \frac{4m^2a^2}{3} - m^2x^2$; d'où l'on tire $\frac{4m^2a^2}{3} -$

$(mx)^2 : z^2 :: \frac{4m^2a^2}{3} : a^2$. Sur les demi-diamètres ca

$= \frac{2ma}{\sqrt{3}}$ & $cb = a$, soit supposée décrite l'Ellipse aib

(fig. 69), on aura les $cf = mx$ & les $fi = z$, on suppose fi parallèle à cb . Mais parce que $y = z + \frac{x}{2}$, on menera ch de manière que $hf = \frac{x}{2}$, &

l'on aura $hi = y$; or pour que y soit terminé à la ligne des x , il est nécessaire que $ch = x$. Puisque ch doit être double de fh , & que l'angle chi des coordonnées est donné *, je construis un triangle rst , dont l'angle s soit égal à l'angle

* Si cet angle n'étoit pas donné, on le prendroit à volonté, & pour plus de facilité on pourroit le faire droit.

Si $\frac{2ma}{\sqrt{3}} = a$, ou si $2m$ est $= \sqrt{3}$ & l'angle bca de 90° , on aura un cercle.

donné, & dont le côté rs soit double de st . Soit $rs = a$, $st = \frac{a}{2}$ & joignant r & t , je suppose $rt = c$.

Nous aurons donc $a : c :: 1 : m = \frac{c}{a}$; ainsi le demi-diametre $ca = \frac{2c}{\sqrt{5}}$. L'angle cfh est $= bca$ (à cause des paralleles bc , ih) $= t$; c'est pour-quoi avec les demi-diametres cb , ac faisant ensemble l'angle $bca = t$, on décrira l'Ellipse ba . Enfin menant ch telle que l'angle hcf soit $= r$, les ch seront $= x$ & les $hi = y$. Si l'angle $s = ihc$ est de 90° , on aura $m = \frac{1}{2} \sqrt{5}$.

108. EXEMPLE VII. Soit l'équation $2xy + 3ax + 4x^2 = -2y^2 + 6xy$. Faisant passer tous les termes affectés de y dans le premier membre, & tous les autres dans le second & divisant par 2, j'ai l'équation convenablement ordonnée $y^2 + xy + ay = \frac{3ax}{2} - 2x^2$. Complétant le pre-

mier membre, & faisant ensuite $y = \frac{3x}{2} + \frac{a}{2} = z$, il vient $z^2 = \frac{x^2 + a^2}{4}$, ou $4z^2 = x^2 + a^2$.

Je cherche le lieu des co-ordonnées z & mx . En multipliant l'équation par m^2 , j'ai $4m^2 z^2 = m^2 x^2 + m^2 a^2$, d'où je tire aisément $(mx)^2 + (ma)^2 : z^2 :: (ma)^2 : \frac{a^2}{4}$. Je décris l'hyperbole Bi (fig. 70), dont le second demi-diametre soit $ca = ma$, & le premier $cB = \frac{a}{2}$; les cf seront $= mx$ & les $fi = z$.

Je mene BK parallele à cf , pour avoir $k = z - \frac{a}{2}$.

A cette quantité j'ajoute $\frac{1}{2}x$ pour avoir y . C'est pourquoi je mene Bh , de manière que $hk = \frac{1}{2}x$, afin d'avoir $hi = z - \frac{a}{2} + \frac{1}{2}x = y$. Pour que sous l'angle donné Bhi , l'on ait $Bh = x$ & $kh = \frac{1}{2}x$, supposant l'angle $s = Bhi$, je fais $rs = a$, $st = \frac{1}{2}a$, je tire rt que je suppose $= c$, & supposant de plus, $m \cdot a = c$, j'ai $a:c::t:m = \frac{c}{a}$; donc le demi-diamètre $ca = ma = c$, cB étant toujours $= \frac{a}{2}$. Disposons ces demi-diamètres sous l'angle $Bca = t$, décrivons l'hyperbole Bi , tirons la tangente Bk nécessairement parallèle à cf & menons Bh faisant avec Bk l'angle $hBk = r$, on aura les $Bh = x$, les $hi = y$. Si l'angle s étoit droit, on auroit $c^2 = a^2 + \frac{9a^2}{4} = \frac{13a^2}{4}$, $c = \frac{a}{2}\sqrt{13}$, & $m = \frac{\sqrt{13}}{2}$.

109. Appliquons maintenant la méthode aux équations qui ne contiennent pas y^2 . Dans ce cas il faut disposer le plan xy de manière qu'il soit positif, sans coefficient & placé du même côté que x^2 , comme on le voit dans l'équation $xy - \frac{x^2}{2} = ax - ay + a^2$. Supposez le multiplicateur $y - \frac{x}{2}$ (de x) $= z$, ou $y = z + \frac{x}{2}$, & substituez la valeur de y dans l'équation donnée pour avoir $xz = \frac{ax}{2} - az + a^2$, ou $zx - \frac{ax}{2} = a^2 - az$. Faites

$z - \frac{a}{2} = u$, vous aurez $xu = \frac{a^2}{2} - au$, ou $xu + au = \frac{a^2}{2}$. Si on rapporte la Courbe aux abscisses x , on ne trouvera pas que les u soient terminés à la ligne des x . C'est pourquoi multipliant l'équation par m pour avoir $u(mx + ma) = \frac{ma^2}{2}$, je fais $mx + ma = p$, il en résulte $pu = \frac{ma^2}{2}$, équation à l'hyperbole rapportée à ses asymptotes. Sur une des asymptotes (fig. 71) prenez $ca = ma$, menez $aB = \frac{a}{2}$ & parallèlement à l'autre asymptote cm , décrivez une hyperbole qui passe par le point B , & vous aurez les $cf = p$, les $fi = u$. Mais $mx = p - ma$; donc $af = mx$. De plus, parce que $z = u + \frac{a}{2}$, faisant $ad = \frac{a}{2}$, & par le point d tirant dn parallèlement à cf , on aura les $dg = af = mx$ & les $gi = z$. Mais $y = z + \frac{x}{2}$; je mene donc dh de manière que hg soit $= \frac{1}{2}x$, & alors hi sera $= y$. Pour que y se termine à la ligne des x , il faut que $dh = x$. Déterminons à présent quelle doit être pour cela la valeur de m . Parce que l'angle dhi des coordonnées est supposé donné, & que $dh : gh :: x : \frac{x}{2} :: 2 : 1$, je construis un triangle rst , dans lequel l'angle s soit égal à l'angle donné, je prends $rs = a$, $st = \frac{a}{2}$ & je suppose $rt = c = ma$; donc $m = \frac{c}{a}$.

C'est pourquoi entre les asymptotes cm , ca faisant entr'elles l'angle $mca = t$, ayant pris $ca = ma = c$, $aB = \frac{a}{2}$, je décris une hyperbole iB , qui passe par le point B . Ayant fait $ad = aB$, je mene nd parallèle à ca , enfin je tire dh de manière que l'angle hdg soit $= r$, les dh seront $= x$, & les hi parallèles à cm seront $= y$. Si l'angle s est droit, on aura $c^2 = \frac{5a^2}{4}$ & $c = \frac{a}{2} \sqrt{5}$.

REMARQUE. Si le plan xy se trouve dans l'équation avec le carré y^2 sans que xx s'y trouve, changeant y en x & réciproquement, on aura une équation qui sera dans le cas de celle que nous venons de construire. Pour connoître si une équation indéterminée du second degré appartient à une Section Conique plutôt qu'à l'autre, relisez ce que nous avons dit (12 & 16).

Nous allons maintenant résoudre quelques Problèmes indéterminés du second degré.

110. PROBLEME. Soit am (fig. 72) la tangente d'un cercle dont le centre est c , supposant toujours qm parallèle au diamètre ab & égale à l'interceptée rm , on demande les lieux de tous les points q . Tirant qP perpendiculairement sur le diamètre ba prolongé & faisant $Pq = am = y$, $aP = qm = rm = x$, $ca = a$. Par la propriété du cercle, $(am)^2 = mr \times mM$ (car la tangente est moyenne proportionnelle entre la secante & sa partie hors du cercle, voyez la Géométrie) ou $y^2 = x$, $(x + 2a)$ ou $y^2 = 2ax + x^2$, équation à une hyperbole équilatère dont les axes sont égaux au diamètre donné. Il est visible que les interceptées rm du quart de cercle ad donnent la branche aq , & les interceptées pt la branche af .

Il n'est pas non plus difficile de voir que par le moyen de la tangente Nbk , on formeroit l'hyperbole opposée $n b h$.

III. PROBLÈME. *Etant donné un point n (fig. 73) entre les côtés d'un angle abc , trouver une Courbe nm qui soit telle qu'en menant par n une ligne quelconque amc , les interceptées am , nc soient toujours égales. Par les points m & n tirez ms & nd parallèles au côté bc & supposez $bs = x$, $ms = y$, $nd = a$. Puisque par la nature du Problème, $am = nc$, on aura $as = bd = b^*$; donc $ad = bs = x$. Or à cause des parallèles sm , nd l'on a $sa : sm :: ad : dn$, ou $b : y :: x : a$; donc $xy = ba = c^2$, en faisant $ba = c^2$; or $xy = c^2$ est une équation à l'hyperbole par rapport aux asymptotes ba , bc . Décrivant donc entre ces lignes une hyperbole qui passe par le point n , on aura la Courbe cherchée.*

II2. PROBLÈME. *Construire un carré égal à un rectangle dont les côtés diffèrent d'une ligne donnée $2a$. Soit y le côté du carré, x le petit côté du rectangle; donc le grand sera $= x + 2a$. Mais par la nature du Problème l'on a $y^2 = 2ax + x^2$, équation à l'hyperbole équilatère, dont les axes sont égaux à la ligne $2a$. Ainsi quelque part qu'on prenne l'ordonnée y , son carré sera toujours égal à un rectangle, dont les côtés différeront de la ligne donnée $2a$.*

II3. PROBLÈME. *Construire un carré égal à un rectangle, dont la somme des côtés contigus est constante & $= 2a$. Soit y le côté du carré*

* Car à cause des parallèles nd , ms , l'on a $ma : ca :: sa : db$. Mais $ma = cn$; donc $sa = bd$.

demandé, x un des côtés du rectangle, le côté contigu sera $= 2a - x$; mais par la nature du Problème $y^2 = 2ax - x^2$, équation à un cercle dont le diamètre $= 2a$; donc le carré de chaque ordonnée & le rectangle des abscisses correspondantes auront la propriété demandée.

114. PROBLÈME. Deux lignes parallèles ah , bg dont les extrémités a & b sont fixes (fig. 74) étant données de position, on demande de trouver entre ces deux lignes un point m par où & par le point a ayant mené la ligne am & la ligne pmq parallèle à ba , bd soit à mp comme une ligne donnée f est à ba . Supposant la chose faite, soit $ab = a$, $ap = x$, $pm = y$. Les triangles semblables abd , mpa donnent $mp : pa :: ab : bd$,

ou $y : x :: a : bd = \frac{x a}{y}$; mais par la nature du

Problème, $\frac{x a}{y} : y :: f : a$; donc $fy = \frac{a^2 x}{y}$, ou

$fy^2 = a^2 x$, ou $y^2 = \frac{a^2}{f} x$, ou $y^2 = px$ en fai-

sant $\frac{a^2}{f} = p$. Cette équation appartient à une parabole; dont ah est la ligne de x .

REMARQUE. Il y a des Problèmes qui paroissent d'abord assez difficiles & dont la solution néanmoins est très-facile, en faisant attention à quelque propriété des Courbes. Qu'on demande, par exemple, la nature de la Courbe ALDB (fig. 74 A), telle qu'ayant décrit autour de l'axe AB une infinité de paraboles LA, FA, DA, &c. (de manière cependant que le plus grand paramètre soit $< 2. AB$), & d'un point B pris sur l'axe AB, ayant mené les lignes BL, BF, &c. perpendiculaires sur ces paraboles, la Courbe AFGB passe par tous les points où ces perpendiculaires rencontrent leurs paraboles. Des points L, F, D, ayant mené les lignes LR, FQ, DP, &c. perpendiculaires à

l'axe AB, je remarque que BP est la sous-normale de la parabole GA, BP la sous-normale de la parabole DA, &c. Soit maintenant $DP = y$, $AP = x$, $AB = 2b$; donc $BP = 2b - x$. Par la nature de la parabole DA, en faisant son parametre $= 2p$, on a $y^2 = 2p \cdot x$. Mais la sous-normale BP est la moitié du parametre; donc $BP = p = 2b - x$ & $y^2 = 2 \cdot (2bx - xx)$. On trouvera de même que pour la parabole GA, en faisant $Bp = 2b - x$, $Ap = x$, $Gp = y$, on trouvera, dis-je, $y^2 = 2 \cdot (2bx - xx)$, & ainsi de même pour toutes les autres paraboles. Donc dans la Courbe ALB les quarrés des ordonnées sont entr'eux comme les doubles produits des abscisses x & $2b - x$; c'est-à-dire, qu'on a toujours $y^2 : 2bx - xx :: 2 : 1 :: aa : bb$ (en supposant $aa = 2bb$); donc $y^2 : 2bx - xx :: aa : bb$, & $y^2 = \frac{aa}{bb} (2bx - xx)$, équation à l'Ellipse. Ainsi la Courbe ADB est une demi-Ellipse, dont l'axe $AB = 2b$, & dont le demi-axe $FQ = a$. Pour trouver FQ, on prendra le produit de deux abscisses quelconques (AP, BP, par exemple) & l'on fera $AP \cdot BP = 2bx - xx : (DP)^2 = y^2 :: bb : aa$; le quatrième terme de cette proportion fera connoître le demi-axe $a = FQ$.

De la Résolution Géométrique des Equations déterminées du troisieme & du quatrieme degré.

115. Si on résout une équation déterminée du troisieme & du quatrieme degré en deux équations indéterminées du second degré, les intersections des Courbes représentées par ces équations indéterminées, donneront les racines de l'équation proposée.

Pour le faire concevoir plus clairement, soient les équations $x^2 = ay$, $xy = ab$, nous aurons deux équations & deux inconnues; ainsi nous pourrons parvenir à une équation à une seule in-

connue. En effet la premiere équation donne $\frac{x^2}{a} = y$, cette valeur de y substituée dans la seconde, donne l'équation déterminée du troisieme degré $\frac{x^3}{a} = ab$, ou $x^3 = ba^2$. Réciproquement je puis résoudre cette dernière équation en deux autres équations indéterminées du second degré, en supposant $x^2 = ay$, & $xy = ab$, de la combinaison desquelles résulte l'équation $x^3 = a^2b$.

Ayant résolu l'équation du troisieme ou quatrieme degré en deux équations indéterminées du second degré, prenant la ligne ap (fig. 75) pour l'axe & le point a pour l'origine des x de l'une & de l'autre Section Conique donnée par ces équations indéterminées; on décrira ces Courbes, & les racines de l'équation proposée seront déterminées par les points d'intersection de ces Courbes. Dans l'exemple proposé sur la tangente ap , décrivez la parabole am , qui sera le lieu de l'équation $x^2 = ay$. Menant ensuite an parallèle aux ordonnées pm , décrivez l'hyperbole de l'équation $xy = ab$, entre les asymptotes ap & na , le point m d'intersection des deux Courbes am , Mm déterminera l'ordonnée mp , & l'abscisse ap déterminera la seule racine réelle de l'équation $x^3 = a^2b$: car les autres racines sont imaginaires; aussi les Courbes am , Mm ne se coupent qu'en un point.

Il ne s'agit donc que de résoudre l'équation déterminée du troisieme & du quatrieme degré en deux indéterminées du second, telles que de ces équations on puisse reproduire l'équation proposée; mais pour plus de facilité, on peut supposer les équations du troisieme & du quatrieme degré dé-

livrées du second terme. Seulement il faudra avoir attention d'ajouter aux racines trouvées, le tiers du coefficient du second terme qu'on aura fait disparaître; mais on ajoutera le quart de ce coefficient, s'il s'agit des équations du quatrième degré, en prenant ce tiers ou ce quart avec un signe contraire*.

116. Soit l'équation générale du troisième degré délivrée du second terme $x^3 + a b x - a f^2 = 0$, dans laquelle a & b peuvent être positifs ou négatifs. Faisons $x^2 = a y$ & substituons la valeur de x^2 dans l'équation proposée, pour avoir, en divisant par a , $y x + b x - f^2 = 0$. L'équation $x^2 = a y$ appartient à la parabole. Pour construire l'autre équation, faisons $y + b = z$ & nous aurons, en transposant, $x z = f^2$, équation à l'hyperbole entre ses asymptotes. Avec un paramètre $= a$ (fig. 76), sur $d m$ prise pour axe des x , dont l'origine est en d , on décrira la parabole $p d n$, qui aura $d m$ pour tangente à l'origine d de l'axe $d s$ des y . Par la propriété de la parabole, $(d m)^2 = (s n)^2 = x^2 = a \times d s = a y$; donc $d n$ est la parabole cherchée. Pour construire l'hyperbole de l'équation $x z = f^2$; comme ces deux courbes doivent avoir le même axe & la même origine des x , je prends $c d = b$, & par le point b je tire $i c q$ parallèle à $d m$; il est visible que l'angle $q c s$ des asymptotes sera égal à l'angle $m d s$ des x & des y , ce qui doit toujours être en pareil cas. Cela posé je cherche un point quelconque de l'hyperbole $M n$, en faisant $f : c q :: q n : f$; donc $q n = \frac{f^2}{q c}$; or $q c$ est une

* Il n'est pas difficile de voir que dans ce cas le tiers du coefficient du second terme, est une ligne & non un nombre.

quantité qu'on peut facilement connoître : ainsi qn sera connue ; donc on trouvera aisément un point n de l'hyperbole ; on trouvera de même les autres points en faisant varier cq . Nous avons donc $qn = z = y + b$ & $y = z - b = qn - mq$; donc $mn = y$ & $dm = cq = x$. Il n'est pas difficile de voir que le point d'intersection n déterminera une des racines dm de l'équation proposée. Si a & b sont positifs , la parabole & l'hyperbole ne se couperont qu'en un point , & l'équation n'aura qu'une seule racine réelle , la même chose arrivera si $b = 0$.

117. Soit maintenant l'équation générale du quatrième degré $x^4 + fgx^2 + f^2bx + f^3c = 0$. Je suppose $f^3c = x^2y^2$; faisant la substitution , il vient $x^4 + fgx^2 + f^2bx + x^2y^2 = 0$. Ecrivez ainsi le troisième terme $\frac{f^2b}{f\sqrt{fc}} f\sqrt{fc}x$. Substituez dans ce terme xy à la place de $f\sqrt{fc}$ (car de l'équation $f^3c = x^2y^2$ l'on tire $xy = f\sqrt{fc}$) pour avoir l'équation $x^4 + fgx^2 + \frac{b\sqrt{f}}{\sqrt{c}} x^2y + x^2y^2 = 0$, ou en divisant par x^2 , $x^2 + fg + \frac{b\sqrt{f}}{\sqrt{c}}y + y^2 = 0$. Cette équation est à l'Ellipse si l'on prend le signe $+$ dans le dernier terme , & au cercle si dans ce cas l'angle des coordonnées est droit. Si on prend le signe $-$ l'équation est à l'hyperbole équilatère. Dans le premier cas joignez l'Ellipse ou le cercle & l'hyperbole équilatère dans le second cas avec l'hyperbole de l'équation $f\sqrt{fc} = xy$, les intersections de ces Courbes détermineront les racines cherchées. Si l'angle des coordonnées est supposé droit dans le cas du signe $-$,

on aura les racines par les intersections des deux hyperboles équilatères. Il est facile de voir qu'on peut, en multipliant l'équation du troisième degré par $x = 0$, ou par $x - 0 = 0$, la rendre du quatrième degré & trouver facilement ses racines.

On peut aussi construire l'équation générale du troisième & du quatrième degré par le moyen de la parabole & du cercle. Pour le faire voir, soit (fig. 76 A) une parabole DEF, dans laquelle on ait l'équation $y = bx + x^2$, B étant l'origine des abscisses qui se prennent sur la ligne MN, & l'angle des coordonnées étant droit (Voyez la Note du n° 103). sur l'indéfinie BA, on prend $BG = d$ (ou $= -d$ si cette ligne doit être prise dans le prolongement BA), sur GH parallèle à MN on prendra $GK = f$, quantité à laquelle on donneroit le signe -, si on la prenoit vers la gauche. Du point K, avec un rayon $KF = c$, je décris un cercle FA qui coupe la parabole en F. Maintenant puisque $FI = y$ & $BI = x$, en rapportant ces lignes à la parabole, on aura $FH = y - HI = x^2 + bx - d$, & $KH = LI = GH - GK = x - f$. Mais le triangle rectangle KHF donne

$$c^2 = x^4 + 2bx^3 + b^2x^2 - 2dx^2 - 2bdx + d^2, \\ + x^2 - 2fx + f^2$$

$$\text{ou } x^4 + 2bx^3 + b^2x^2 - 2bdx + d^2 = 0 \text{ (A).} \\ - 2dx^2 - 2fx + f^2 \\ + x^2 - c^2$$

Prenant maintenant une équation quelconque du quatrième degré, qui sera toujours renfermée dans la générale $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ (B), les BI qu'on doit trouver seront les x , ou les valeurs des racines de cette équation. Comparant donc

l'équation B avec l'équation A , & les supposant égales, nous aurons $2b = p$; $bb - 2d + 1 = q$; $-2bd - 2f = r$; $dd + ff - cc = s$. Or les lignes désignées par les lettres b , d , f , c peuvent toujours être prises de la longueur nécessaire , pour que ces équations soient vraies , puisque ces équations servent à les déterminer. La première donne $b = \frac{1}{2}p$; la seconde donne $d = \frac{b^2 + 1 - q}{2}$; par le troisième, $f = \frac{-2bd + r}{2}$; & par la dernière en-

fin, $c = \sqrt{dd + ff - s}$. Il est visible , par l'inspection de ces équations, que b , d , f ne peuvent jamais être imaginaires. A l'égard de c , cela ne peut arriver qu'autant que s seroit une quantité positive plus grande que $dd + ff$. Mais parce que d se détermine non-seulement par p & q , mais aussi par l'unité de ligne , unité que l'on peut prendre aussi grande qu'on veut , on pourra toujours rendre $dd + ff$ plus grand que s & supposer toujours c possible.

Si le cercle coupe la parabole en quatre points , la proposée aura quatre racines réelles ; elle en aura seulement deux , s'il n'y a que deux points de section : mais toutes ses racines seront imaginaires, si le cercle ne rencontre pas la parabole. D'autre côté , parce que les racines imaginaires d'une équation sont toujours en nombre pair , le cercle coupera la parabole en deux ou en quatre points , ou ne la coupera pas du tout. Si le cercle ne faisoit que toucher la parabole , chaque point d'arouchement indiqueroit deux racines égales qui se confondroient en une seule ; de sorte que deux points

d'attouchement indiqueroient quatre racines qui seroient égales deux à deux.

Soit maintenant l'équation cubique $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, qui étant multipliée par x devient $x^4 + px^3 + qx^2 + rx = 0$ (A). Equation du quatrième degré, qui, étant comparée avec la générale du même degré, donne $s = 0$; de sorte que dans ce cas $c = \sqrt{(dd + ff - s)}$, est $= \sqrt{(dd + ff)}$; ce qui indique que dans ce cas l'une des racines de l'équation A est $= 0$, & que le cercle décrit du centre K avec le rayon c passe par le point B, origine des abscisses. Les autres racines de l'équation A (les mêmes que celles de la proposée) se trouveront facilement; car puisque une équation du troisième degré doit avoir une racine réelle & deux imaginaires, ou bien trois racines réelles, le cercle coupera la parabole en un ou trois points, ou bien la coupera en un & la touchera en un autre point.

Nous donnerons dans la suite une méthode générale pour construire une équation d'un degré quelconque, par le moyen d'une seule Courbe & d'une ligne droite.

Solution de quelques Problèmes géométriques déterminés & indéterminés des degrés supérieurs.

118. PROBLÈME. Trouver deux moyennes proportionnelles x & y entre deux lignes données a & b . Il est évident que la première moyenne proportionnelle donnera la seconde, c'est pourquoi nous allons chercher la première. Par la nature du Problème $a : x :: x : y :: y : b$; donc par la nature des progressions $a^3 : x^3 :: a : b$ & $x^3 = a^2 b$, équation

tion du troisieme degre, que nous avons déjà construite (115) par le moyen d'une parabole & d'une hyperbole rapportées à ses asymptotes; de sorte que l'abscisse ap (fig. 75) est la racine cherchée de notre équation. Supposons $ap = c$, nous aurons par la nature du Problème $a : c :: c : y = \frac{c^2}{a}$, seconde moyenne proportionnelle cherchée.

COROLLAIRE. Puisque par la propriété des progressions $a^3 : x^3 :: a : b$, il est évident que le cube fait sur la ligne a , est au cube fait sur la ligne x , comme $a : b$; donc si $a : b :: 2 : 1$, le cube fait sur le côté a fera double du cube fait sur la ligne x , Si $a = 3b$, le premier cube fera triple du second. On peut donc résoudre le fameux Problème de la duplication du cube, en cherchant la premiere des deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données.

119. PROBLÈME. Un angle droit abh (fig. 77) & un point fixe a sur un de ses côtés, étant donnés de position sur un plan, si l'on mène du point a jusqu'à la rencontre du côté bh , une ligne quelconque bg & qu'on prenne toujours $mg = bg$, quelle est la Courbe à laquelle appartiennent tous les points m ? Supposant le Problème résolu, du point m j'abaisse la perpendiculaire mp sur le côté ab , & faisant $ab = a$, $ap = x$, $pm = y$; pb sera $a - x$ & am sera $\sqrt{(x^2 + y^2)}$; or les triangles apm , abg

donnent $x : y :: a : bg = \frac{ay}{x} = gm$, par supposition. Mais

à cause des paralleles pm & bg , l'on aura $ap : pb :: am : gm$, ou $x : a - x :: \sqrt{(x^2 + y^2)} : gm = gb = \frac{ay}{x}$;

d'où l'on tire $ay = (a - x) \cdot \sqrt{(x^2 + y^2)}$, ou $a^2 y^2 =$

$$(a - x)^2 \cdot (x^2 + y^2), \text{ ou } y^2 = \frac{(x - a)^2 \cdot x^2}{2ax - x^2} =$$

$\frac{(a-x)^2 \cdot x}{2a-x}$, ou $y = \pm \frac{ax - x^2}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$. Cette expression

fait voir qu'à chaque abscisse il répond deux ordonnées égales, l'une positive, l'autre négative. Si l'on suppose $x < 2a$, les ordonnées seront réelles; donc la Courbe passe au-delà de b , & ses deux branches s'étendent l'une vers n , l'autre vers N . En prenant $gn = gb$, les triangles

abg , aqn donnent $x : y :: a : bg = \frac{ay}{x} = gn$. Mais à cause des parallèles bg & qn , l'on a $aq : bq :: an : gn$, ou $x : x - a :: \sqrt{(x^2 + y^2)} : \frac{ay}{x}$, d'où il est aisé de tirer

$y = \pm \frac{x^2 - ax}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$, qui est l'équation pour les bran-

ches bn , bN . Du point b comme centre, avec un rayon $= a$, décrivez un cercle dont ad soit un diamètre, menez la tangente indéfinie fdF , cette ligne sera l'asymptote de

la Courbe. En effet, supposant $x = 2a$, on a $y = \pm \frac{2a^2}{0}$

$= \pm \infty$. Si l'on suppose $y = \sqrt{(2ax - x^2)}$, on aura en substituant cette valeur dans l'équation que nous venons de trouver & ôtant la fraction, on aura dis-je, $2ax - x^2 = x^2 - ax$, ou $2a - x = x - a$, ou $3a = 2x$, &

$x = \frac{3a}{2}$. Mais la Courbe rencontre le cercle lorsque son

ordonnée devient égale à celle du cercle; ainsi la Courbe rencontre le cercle aux points correspondants à l'abscisse

$at = \frac{3a}{2}$.

120. PROBLÈME. Diviser un arc de cercle $mpqn$ (fig. 78) en trois parties égales. Supposant la chose faite, des points de division p & q j'abaisse les perpendiculaires ps , qt sur la corde mn . Divisant mn en deux également en d , il est visible que $sd = dt$, & à cause de $mp = pq = qn$, pq est parallèle à mn . Cela posé, faisons la constante $md = a$, $ds = x$, $sp = y$, on aura $st = 2x = pq = mp$. Mais le triangle rectangle mst donne $4x^2 = y^2 + a^2 - 2ax + x^2$, transposant, réduisant, divisant par 3 &

Tome II.

V

complétant, il vient $\left(x + \frac{a}{3}\right)^2 = \frac{4a^2}{9} + \frac{y^2}{3}$. Faisant $x + \frac{a}{3} = z$, on a $z^2 = \frac{4a^2}{9} + \frac{y^2}{3}$, ou $z^2 - \frac{4a^2}{9} = \frac{y^2}{3}$, ce qui donne $z^2 - \frac{4a^2}{9} : y^2 :: 1 : 3 :: \frac{4a^2}{9} : \frac{4a^2}{3}$. Cette analogie appartient à une hyperbole, dont le premier demi-axe $= \frac{2a}{3}$ & le second $= \frac{2a}{\sqrt{3}}$: l'angle des coordonnées est ici droit. Pour décrire cette hyperbole, divisez mn en trois parties égales, mr , ra , an ; & prenant le point a pour le centre, ar pour le premier demi-axe, $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ pour le second demi-axe, décrivez l'hyperbole $p r M P$, son intersection p avec le cercle donnera l'arc mp , qui sera le tiers de l'arc mpn . Par le point p , tirez $p q$ parallèlement à mn , le point q d'intersection déterminera le second tiers $p q$, & enfin $n q$ sera le troisième tiers de l'arc proposé. L'hyperbole coupe le cercle non-seulement en p , mais encore en un autre point P . Le point P indique le tiers de l'arc $m P n$, supplément à 360 degrés de l'arc proposé. En effet, si l'on avoit voulu couper cet arc en trois parties égales, on s'y seroit pris de même, & faisant $df = x$, $Pf = y$, on auroit trouvé la même équation que ci-dessus. On peut voir par-là comment on peut partager un angle en trois parties égales. Il suffit pour cela de couper l'arc de cercle, qui est sa mesure, en trois également; ce qui est maintenant facile.

121. PROBLÈME. *Étant donné un quart de cercle amb (fig. 79), menons un rayon quelconque cm qui détermine l'arc bm , dont le cosinus $= cd$ & le sinus $= md$, prenons l'arc bf tel que $bf : bm :: 1 : m$. Coupant ensuite cg , qu'on suppose donnée par une fonction de cd ou de md , on demande la Courbe qui doit passer par tous les points g . Des points g & f abaissons les lignes gh & fk perpendiculairement sur le rayon $cb = a$, faisons $ch = x$, $gh = y$; donc $cg = \sqrt{(x^2 + y^2)} = z$. Faisons*

encore l'arc $fb = p$, & par conséquent l'arc $bm = m.p$.
 Nous savons que $\cos. mp =$

$$\frac{(\cos. p + \sqrt{-1}). \sin p^m + (\cos. p - \sqrt{-1}). \sin p^m}{2 a^{m-1}}.$$

(Voyez la Géométrie). Or les triangles cfk , ceg donnent

$$eg : cf :: ch : ck, \text{ ou } \zeta : a :: x : \cos. p = \frac{ax}{\zeta}.$$

Les mêmes triangles donnent $\zeta : a :: y : \sin. p = \frac{ay}{\zeta}$; donc en

$$\text{substituant, } \cos. mp = \frac{a^m}{\zeta^m} \cdot \frac{(x+y\sqrt{-1})^m + (x-y\sqrt{-1})^m}{2 a^{m-1}};$$

donc faisant $\cos. mp = q$, multipliant ensuite par $\frac{\zeta^m}{a^m}$, &

effaçant a^{m-1} , diviseur commun des deux membres,

$$\text{Pon a } \frac{q\zeta^m}{a} = \frac{(x+y\sqrt{-1})^m + (x-y\sqrt{-1})^m}{2}.$$

Si m est un nombre entier (fini), en élevant les binomes à la puissance m , les imaginaires disparaîtront, & substituant à la place de q sa valeur donnée en ζ , & à la place de ζ sa valeur $\sqrt{x^2 + y^2}$, on aura facilement l'équation (finie)

$$\text{cherchée. Si } m=2, \text{ l'équation deviendra } \frac{q\zeta^2}{a} = x^2 - y^2. \text{ Si}$$

dans cette même supposition nous faisons $q = \frac{\zeta^2}{a}$, il en

$$\text{résultera } \frac{\zeta^4}{a^2} = x^2 - y^2, \text{ ou } \zeta^2 = a \sqrt{x^2 - y^2}, \text{ ou}$$

(en substituant la valeur de ζ^2) $x^2 + y^2 = a \sqrt{x^2 - y^2}$, ou $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = a^2x^2 - a^2y^2$. La Courbe de cette équation du quatrième degré, est appelée *Lemniscate* (fig. 80), elle est composée de quatre branches amc , apc , bMc & bPc , égales & semblables, renfermées dans le cercle, dont le rayon = a , se coupant au centre du cercle sous un angle demi-droit: chacune de ces branches est produite par le quart de cercle correspondant.

En se servant de la formule du sinus, & faisant $dm = \sin. mp = t$ (fig. 79), on auroit trouvé, en supposant $m=2$ & $t = \frac{\zeta^2}{a}$, on auroit, dis-je; trouvé $\frac{\zeta^4}{a^2} = 2xy$, ou

$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$, équation qui représente une ligne du quatrième ordre.

122. PROBLÈME. Parmi un nombre m de moyennes proportionnelles entre a & b , trouver celle du rang n : supposant, par exemple, $m = 10$ & $n = 7$, trouver la septième de dix moyennes proportionnelles entre a & b . Soit x la première des moyennes proportionnelles, on aura la

série suivante $\therefore a : x : \frac{x^2}{a} : \frac{x^3}{a^2} \dots \frac{x^n}{a^{n-1}} \dots \frac{x^m}{a^{m-1}} :$

$\frac{x^{m+1}}{a^m} = b$. Il est aisé de voir que les exposants de x

désignent les rangs des moyennes proportionnelles cherchées ; ainsi celle du rang n est $= \frac{x^n}{a^{n-1}}$. Supposons

cette quantité $= z$, nous aurons $x^n = a^{n-1} z$; or à cause de $\frac{x^{m+1}}{a^m} = b$, $x^{m+1} = a^m b$, ou en prenant les

racines, $x = \sqrt[m]{a^{m+1} b^{m+1}}$; donc $x^n = \sqrt[m]{a^{m+1} b^{m+1}}^{\frac{n}{m+1}}$
 $= a^{\frac{n}{m+1}} z$; ainsi $z = a^{\frac{n}{m+1}} \sqrt[m]{b^{m+1}}$. Cette formule représente la moyenne proportionnelle cherchée.

Pour en venir à la construction, élevons les deux membres à la puissance $m+1$, afin d'avoir $z^{m+1} = a^{m+1} b^{m+1}$. Si m est un nombre impair, en faisant $z^2 =$

$a y$, nous aurons $a^{m+1} b^{m+1} = a^{\frac{m+1}{2}} y^{\frac{m+1}{2}}$, d'où

l'on tire, $y^{\frac{m+1}{2}} = a^{\frac{m-1}{2}} b^{m+1}$. Si par le moyen de cette équation on peut trouver y , on aura aussi z qui est moyenne proportionnelle entre a & y . Si $\frac{m+1}{2}$ est

un nombre pair, en employant la même méthode, vous transporterez la formule à une troisième proportionnelle p aux quantités a & y , comme nous venons de le faire à l'égard de y , troisième proportionnelle à a & z , & ainsi de suite jusqu'à ce que nous parvenions à un exposant impair. Il suffira donc de construire la formule dans la

supposition de $m + 1$ impair. Multiplions-la par z pour avoir $z^{m+2} = a^m - n + 1 b^n z$, l'exposant $m + 2$ sera pair ; faites $z^2 = ay$ & vous aurez en divisant, $y^{\frac{m+2}{2}} = a^{\frac{m-2n}{2}} b^n z$, $\frac{m+2}{2}$ étant un nombre entier. Sur

l'axe ad (fig. 81) décrivez la parabole abn de la dernière équation que nous venons de trouver, les ad seront $= z$, décrivez ensuite la parabole abm de l'équation $z^2 = ay$, ces deux paraboles se couperont au point b , duquel menant l'ordonnée bd , $ad = z$ sera la moyenne proportionnelle cherchée, & $bd = y$ sera troisième proportionnelle aux lignes a & z .

123. PROBLÈME. *Étant donnée la première de plusieurs lignes en progression géométrique, déterminer la seconde, enforte que la somme de la seconde & de la dernière soit égale à une quantité donnée b . Soit a la première, x la seconde de ces lignes ; donc la dernière sera $b - x$, parce que la somme de ces deux lignes est $= b$. Puisque a est la première des lignes proportionnelles & x la seconde, la troisième sera $\frac{x^2}{a}$. Si on retenoit cette expression dans le calcul, l'expression de la quatrième proportionnelle renfermeroit la troisième puissance d'une inconnue. Pour obvier à cet inconvénient, je fais $\frac{x^2}{a} = y$*

& regardant y comme la troisième proportionnelle, je trouve la quatrième, qui peut être exprimée de deux manières, par le moyen des lettres a, x, y ; savoir par $\frac{xy}{a}$, ou par $\frac{y^2}{x}$. Faisant ensuite $y : \frac{xy}{a} :: \frac{xy}{a} : z = \frac{x^2 y^2}{y a^2} = \frac{y^2}{a}$, à cause de $y = \frac{x^2}{a}$, je trouve la cinquième $= \frac{y^2}{a}$; dans ces formules l'inconnue ne se trouve élevée

à aucune puissance au-dessus de la seconde. Mais si en retenant ces expressions, nous voulions continuer le calcul, nous trouverions des troisièmes & quatrièmes puissances. Pour les éviter, faisant la quatrième proportionnelle $= z$,

j'ai la cinquième $= \frac{tx}{a} = \frac{ty}{x} = \frac{t^2}{y}$. La cinquième étant supposée $= z$, je détermine les autres jusqu'à la neuvième, ainsi qu'on le voit ici. On peut pousser le calcul plus loin, en faisant la neuvième $= s$.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.
a	x	$\frac{x^2}{a}$
		y	$\frac{xy}{a}$	$\frac{y^2}{a}$
			$\frac{y^2}{x}$
			.	$\frac{tx}{a}$	$\frac{ty}{a}$.	.	.
				$\frac{ty}{x}$	$\frac{t^2}{x}$.	.	.
				$\frac{t^2}{y}$
				z	$\frac{xz}{a}$	$\frac{zy}{a}$	$\frac{z^2}{a}$	$\frac{zt}{a}$
					$\frac{zy}{x}$	$\frac{t^2}{x}$	$\frac{zt}{x}$.
					$\frac{t^2}{y}$	$\frac{zt}{y}$.	.
					$\frac{zt}{t}$.	.	.

Venons maintenant à la construction. Si vous supposez que la cinquième proportionnelle soit la dernière, prenez l'expression $\frac{y^2}{a}$ qui n'a besoin que d'une substitution, vous aurez $\frac{y^2}{a} = b - x$, ou $y^2 = a(b - x)$, équation à une parabole, dont le paramètre $= a$. D'ailleurs la substitution donne $\frac{x^2}{a} = y$ ou $x^2 = ay$, qui désigne une

parabole de même parametre. Prenant le parametre $AB = a$ (fig. 82) décrivez la parabole Ad , dont la tangente soit Ap , vous aurez la parabole de l'équation $x^2 = ay$. Prenant ensuite $Ac = b$, du point c pris pour sommet, décrivez sur l'axe cA la parabole cd de même parametre, elle coupera la premiere en d , & en menant l'ordonnée dp , l'abscisse $Ap = x$ sera la seconde proportionnelle cherchée. En effet, la seconde proportionnelle étant x , la troisieme

seroit $\frac{x^2}{a}$ & la cinquieme $\frac{x^4}{a} = b - x$, par supposition, d'où l'on tire $x^4 = a^3. (b - x)$. Si l'on prend la valeur de y dans l'équation $x^2 = ay$ & qu'on la substitue dans l'équation $y^2 = a. (b - x)$, il en résultera l'équation $x^4 = a^3. (b - x)$.

Si vous supposez que la sixieme proportionnelle est la derniere, vous aurez $\frac{t^2}{x} = b - x$, ou $t^2 = bx - x^2$,

équation à un cercle, dont le diametre $= b$. Premièrement décrivez la parabole Ad (fig. 83) de l'équation $x^2 = ay$, que donne la substitution; les abscisses x seront situées sur la tangente Ap . Menez les ordonnées pd (y) perpendiculaires sur Ap , faisant par-tout $AB = a : Ap(x) :: dp(y) : fp(t)$, & faites passer une Courbe par tous les points f . Prenant enfin $Ac = b$, décrivez sur le diametre Ac , le demi-cercle Afc qui coupera la Courbe AMf en un point f qui déterminera l'abscisse $Ap = x$, seconde proportionnelle cherchée.

L'artifice qu'on vient de mettre en usage dans ce Problème, peut souvent rendre élégantes les solutions des Problèmes, qui sont au-dessus du troisieme & du quatrieme degré. Cet artifice consiste en ce qu'à la place des expressions qui, si elles restoient dans le calcul, donneroient des Courbes au-dessus du second ordre, on substitue d'autres inconnues & ainsi en multipliant le nombre des inconnues, par le moyen des Sections Coniques, ou des Courbes plus élevées qu'on décrit en employant ces sections, on trouve la solution du Problème. Pour que la solution soit plus élégante, il faut avoir attention que le nombre des substitutions & le nombre des inconnues dans la dernière équation soit le plus petit possible.

124. REMARQUE. Pour éviter dans la construction des Problèmes les Courbes trop élevées, les Analystes ont établi la Règle suivante : Si le degré de l'équation à construire est un nombre carré, on doit se servir de deux Courbes, chacune d'un ordre égal à la racine carrée de l'ordre de la proposée. Si le degré de la proposée n'est pas carré, on en retranchera le plus grand carré, & si le reste est égal ou plus petit que la racine de ce plus grand carré, on emploiera encore deux Courbes, dont le degré de l'une doit être égal à la racine, le degré de l'autre étant plus grand d'une unité. Si le reste est plus grand que cette racine, on emploiera deux Courbes, dont le degré de chacune surpassera d'une unité la racine de ce carré; ainsi pour construire une équation du neuvième degré, on emploiera deux Courbes du troisième ordre. Si l'équation est du onzième degré, en ôtant de 11 le plus grand carré 9, il restera 2 < 3 racine de 9. On construira donc avec une Courbe du 3^e & une du 4^e ordre : dans ce cas on multiplie l'équation du 11^e degré par $x=0$ (on peut aussi la multiplier par $x-0=0$), pour qu'elle devienne du 12^e degré. Si l'équation est du 12^e degré, c'est la même chose; mais si l'équation est du 13^e, 14^e ou 15^e degré, à cause qu'en ôtant 9 de 13, 14, 15 le reste est plus grand que 3, on fera usage de deux Courbes chacune du 4^e ordre. Mais en vain on établit une telle règle, si on n'enseigne comment il faut s'y prendre pour cela; or c'est ce qu'ils n'enseignent pas. Bien plus il ne paroît pas possible d'observer cette règle. Les équations du 10^e & 11^e degré se réduisent au 12^e, en multipliant les premières par $x^2=0$, & les dernières par $x=0$. Soit l'équation du 12^e degré délivrée de son second terme $x^{12} + ax^{10} + bx^9 + \&c. = 0$; en faisant $x^3 = y$, nous aurons $y^4 + ay^3x + \&c. = 0$, équation du quatrième degré. Si l'on suppose $x^4 = y$, il vient $y^3 + ay^2x^2 + by^2x + \&c. = 0$, qui est aussi du quatrième degré; ainsi l'on ne peut obtenir par cette méthode deux Courbes, l'une du troisième, l'autre du quatrième degré, comme la règle l'exige. Si on avoit l'équation du 16^e degré $x^{16} + ax^{14} + bx^{13} + \&c. = 0$, en faisant $x^4 = y$, on auroit $y^4 + ay^3x^2 + \&c. = 0$, équation du cinquième degré. C'est pourquoi par cette méthode l'équation du 16^e degré ne peut se construire par deux équations du 4^e, ainsi que l'exige la règle.

D'ailleurs on doit faire plus d'attention à la facilité de la construction qu'à la simplicité des équations, & quoique l'équation à la parabole soit plus simple que l'équation au cercle, on doit employer celle-ci de préférence, à cause de la facilité de sa description; or il arrive souvent que des Courbes plus élevées sont plus faciles à décrire que d'autres moins élevées. Par exemple, la conchoïde est une Courbe du quatrième degré, plus facile à décrire que plusieurs lignes du troisième ordre. Ainsi sans nous mettre en peine de cette règle, nous allons enseigner à construire toute équation déterminée par le moyen d'une Courbe de même degré que l'équation, & de la ligne droite. Pour cela on divisera toute l'équation par tous les facteurs du dernier terme, excepté un seul qu'on fera $= y$, on décrira la Courbe dont l'ordonnée est y , en donnant successivement plusieurs valeurs à x . La Courbe étant une fois décrite, on mènera parallèlement aux abscisses une ligne droite à une distance égale à la quantité qu'on a supposée $= y$. L'intersection de cette droite avec la Courbe donnera toutes les racines réelles de l'équation proposée.

125. EXEMPLE. Soit l'équation $x^4 - 2a^2x^3 + a^4x - a^4b = 0$. Divisant tout par a^4 , faisant $b = y$ & trans-

posant, j'ai $\frac{x^4}{a^4} - \frac{2x^3}{a^2} + x = y$. Je décris la Courbe

de cette équation. Pour cela je prends cB (fig. 84) pour l'axe & le point a pour l'origine des x , & supposant $x = 0$, je trouve $y = 0$; donc la Courbe rencontre l'axe des abscisses en a . Supposant ensuite $x = \pm a$, je trouve $y = 0$, donc la Courbe rencontre encore son axe aux points c & B déterminés en faisant $ac = aB = a$. Si l'on suppose $x = \pm 2a$, l'on trouve $x = \pm 17a$: on peut voir par-là comment on peut trouver tant d'autres points que l'on voudra de la même Courbe. De plus le troisième terme du premier membre étant supposé une ligne d'une grandeur quelconque, les deux autres peuvent se construire par la méthode (89) ci-dessus. Supposant donc cette Courbe décrite, je mène par l'origine a des abscisses & parallèlement aux ordonnées, la ligne $am = b$; & parceque $y = b$ est une équation à une ligne droite parallèle à l'axe des x , par le point m je tire mn parallèle-

ment aux abscisses, les lignes mp , mq , mn interceptées entre le point m & les points auxquels mn rencontre la Courbe, sont les racines réelles de l'équation proposée. En effet, appellant Y les ordonnées du nouvel axe mn , on aura $Y = y - b$; or les racines de l'équation $\frac{x^3}{a^4} -$

$\frac{2x^3}{a^2} + x = Y = y - b$, répondent aux points auxquels $Y = y - b$ est $= 0$; donc, &c. *. D'ailleurs si on prend la valeur de y dans l'équation $y - b = 0$, & qu'on substitue cette valeur dans l'équation $\frac{x^3}{a^4} - \frac{2x^3}{a^2} + x = y$, on trouvera facilement l'équation proposée.

Si on avoit à construire l'équation $x^7 + abx^3 + c = 0$, on pourroit supposer $c = y$, & supposant $d = 1$, faire $y = -\frac{x^7}{d^6} - \frac{abx^3}{d^4}$, ce qui ne change rien, parce que l'unité ne divise pas; or les termes de la seconde équation sont faciles à construire pour chaque valeur de x .

Si l'on fait $= r$ le rayon d'un cercle, & $= a$ le cosinus d'un arc ou d'un angle quelconque p , l'équation $r^4 a = 16x^4 - 20r^2x^3 + 5r^4x$ exprimera le rapport qu'il y a entre a & le cosinus de l'arc subquintuple, ainsi qu'il suit de ce que nous avons dit de la Trigonométrie. Construisant cette équation par la ligne droite & une courbe du cinquième ordre, on trouvera cinq racines; l'une de ces racines donnera le cosinus de la cinquième partie de l'arc p , les autres quatre racines donneront les cosinus des arcs $\frac{4m+p}{5}$, $\frac{8m+p}{5}$, $\frac{12m+p}{5}$, $\frac{16m+p}{5}$, m étant le quart

de la circonférence. A chaque cosinus il répond deux arcs, le sinus étant positif ou négatif; mais dans les cas particuliers il n'est pas difficile de déterminer lequel de ces arcs est celui qu'il faut prendre. Si le nombre des parties dans

* Si l'axe mn touchoit la Courbe en un point, il y auroit des racines égales, parce que les points de section seroient censés se confondre en ce point.

lesquelles on veut diviser un arc, n'étoit pas un nombre premier, on pourroit diviser ce nombre en ses facteurs, & ceux-ci encore en d'autres facteurs. Par exemple, si on vouloit diviser un arc donné en 30 parties égales, on pourroit d'abord diviser cet arc en 5 parties égales, divisant ensuite chacune de ces parties en 2, & chacune de ces deux en trois autres parties, l'on auroit l'arc divisé en 30 parties égales. Mais si on vouloit diviser un arc en onze parties égales, il faudroit construire une équation du onzième degré.

126. REMARQUE. On peut par la même méthode trouver les racines réelles d'une équation numérique Soit l'équation $x^3 - 2x^2 + 3x - 192 = 0$; faisons $a = 2$, $b = 3$, $c = 192$ & cherchons ensuite les racines, comme si a , b , c étoient des lignes qui eussent les rapports des nombres auxquels nous avons supposé ces lettres égales. Supposant que d est l'unité de ligne (ce qui est permis), j'ai $d = 1$, $a = 2d$, &c.; & faisant $c = y$, je trouve les racines de l'équation proposée. Supposons que les racines réelles de cette équation sont mp , mq , mn , les autres étant imaginaires, j'applique d sur ces racines; si je trouve $mp = 2d$, $mq = 6d$, $mn = 15d$, je conclurai que les racines cherchées sont 2, 6 & 15.

COURBES TRANSCENDANTES.

I. **L**ES *Courbes Algébriques* ou *Géométriques*, ainsi que nous l'avons déjà remarqué ci-dessus, sont celles dont la nature peut être exprimée par une équation algébrique entre les coordonnées x & y . Mais les *lignes transcendantes*, qu'on appelle encore *mécaniques*, sont telles qu'on ne peut exprimer leur nature par une équation algébrique qui contienne le rapport des coordonnées. Toute fonction qui n'est pas algébrique est *transcendante*. Telles sont les expressions qui contiennent des arcs, des sinus, des cosinus, des tangentes, des sécantes, des loga-

richmes (du moins des quantités variables), certaines expressions qui contiennent des imaginaires qu'on peut changer en des quantités non-imaginaires, les expressions dans lesquelles un ou plusieurs exposants sont des nombres irrationnels, comme si l'on avoit

$y = x^{\sqrt{3}}$. Appellant y l'ordonnée, x l'abscisse, les Courbes dont la nature est exprimée par les équations suivantes sont mécaniques, $y = a. \cos. x$ (cette expression signifie que y est égal à l'arc a , dont le cosinus est égal à l'abscisse x); $y = a. \sin. x$; $y = a. \tan. x$; $y = a \cot. x$; $y = l. x$; $y^m = l. x^n$, l désigne le logarithme. Enfin toute équation qui exprimant la relation des coordonnées n'est pas rationnelle ou ne peut pas être rendue rationnelle, est transcendante, &c. rend transcendante la Courbe

qu'elle représente. Les équations $y = x^{\sqrt{5}}$, $y = x^{\sqrt{2}}$ représentent des Courbes transcendantes. M. Leibnitz appelle *Courbes interscendantes*, celles dont les variables ont des exposants irrationnels. On ne peut construire la Courbe de l'équation $y = x^{\sqrt{2}}$ par aucune voie géométrique. Si nous voulons nous contenter d'avoir $\sqrt{2}$ par approximation, en mettant à la place de cette quantité quelqu'une des fractions suivantes $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{17}{12}$, $\frac{41}{29}$, &c. on aura à la vérité des Courbes algébriques : car supposant $\sqrt{2} = \frac{3}{2}$, il viendra $y = x^{\frac{3}{2}}$, ou $y^2 = x^3$. Mais ces Courbes seront du 3^e, 7^e, 17^e, 41^e, &c. ordre; de sorte que $\sqrt{2}$ ne peut s'exprimer exactement que par une fraction dont le numérateur & le dénominateur soient des nombres infiniment grands; ainsi cette Courbe est censée d'un ordre infini, & l'on ne peut la regarder comme algébrique.

Si on vouloit construire cette Courbe, on le pourroit par le moyen des logarithmes : car les logarithmes des quantités égales étant égaux, l'équation $y = x^{\sqrt{2}}$ donne $\log y = \log x^{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \log x$. De ce que $\log y = \sqrt{2} \log x$, il suit qu'en multipliant le logarithme de chaque abscisse par $\sqrt{2}$, on aura le logarithme de l'ordonnée correspondante. Ce logarithme fera connoître l'ordonnée, du moins par approximation. En supposant les x positifs, si $x = 0$, on aura $y = 0$; si $x = 1$, on aura $y = 1$, comme cela est évident. Si $x = 2$, $\log y = \sqrt{2} \log 2 = 0.4257274$, à-peu-près; donc $y = 2.665186$, à-peu-près. Si $x = 10$, on aura $\log y = 1.4142356$, à-peu-près, & $y = 25.956$, à-peu-près. Mais si on suppose x négatif & $= -1, -2, -3$, &c. on ne peut pas définir la valeur de y .

Si l'on suppose $\sqrt{2} = \frac{1}{2}$, l'on a $(-3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-27}$, quantité imaginaire; mais si vous supposez $\sqrt{2} = \frac{7}{5}$, vous aurez $\sqrt{(-3)^7}$, quantité réelle; de sorte qu'il n'est pas possible de trouver les y correspondants aux x négatifs, parce qu'on n'a pas droit de supposer $\sqrt{2}$ égal à une fraction dont le dénominateur soit impair, plutôt qu'à une fraction dont le dénominateur soit pair.

2. Nous avons dit ci-dessus que certaines expressions qui renferment des imaginaires pouvoient quelquefois se réduire en des quantités non-imaginaires. Soit x un arc pris dans un cercle, dont le rayon $= 1$, on aura le sinus & cosinus d'un arc d'une multiplicité p par les formules $\cos. p. x = (\cos. x + \sqrt{-1} \sin. x)^p + (\cos. x - \sqrt{-1} \sin. x)^p$

$$\& \sin. p x = \frac{(\cos. x + \sqrt{-1} \sin. x)^p - (\cos. x - \sqrt{-1} \sin. x)^p}{2 \sqrt{-1}}$$

Si l'arc x est supposé infiniment petit, en supposant p infiniment grand, pour avoir un produit fini u , on aura $p x = u$, $x = \frac{u}{p}$, $\sin. x = \frac{u}{p}$, & $\cos. x = 1$, parce que le sinus d'un arc extrêmement petit est censé égal à cet arc, tandis que le cosinus d'un arc infiniment petit est censé égal au cosinus d'un arc $= 0$. Substituant ces valeurs de $\sin. x$ & $\cos. x$ dans les formules ci-dessus, nous aurons

$$\cos. p x = \cos. u = \frac{\left(1 + \frac{u}{p} \sqrt{-1}\right)^p + \left(1 - \frac{u}{p} \sqrt{-1}\right)^p}{2}$$

$$\& \sin. u = \frac{\left(1 + \frac{u}{p} \sqrt{-1}\right)^p - \left(1 - \frac{u}{p} \sqrt{-1}\right)^p}{2 \sqrt{-1}}$$

Supposant c égal au nombre dont le logarithme hyperbolique est $= 1$, nous aurons $c^x = \left(1 + \frac{x}{p}\right)^p$, ainsi que nous allons le prouver dans un moment,

$$\& \text{faisant } x = u \sqrt{-1}, \text{ on trouvera } 1 + \frac{u}{p} \sqrt{-1}$$

$$= 1 + \frac{x}{p}; 1 - \frac{u}{p} \sqrt{-1} = 1 - \frac{x}{p}; \left(1 + \frac{u}{p} \sqrt{-1}\right)^p$$

$$= \left(1 + \frac{x}{p}\right)^p = c^x = c^{u \sqrt{-1}}; \left(1 - \frac{u}{p} \sqrt{-1}\right)^p$$

$$= \left(1 - \frac{x}{p}\right)^p = c^{-x} = c^{-u \sqrt{-1}}; \text{ donc nous}$$

$$\text{aurons } \cos. u = \frac{c^{+u \sqrt{-1}} + c^{-u \sqrt{-1}}}{2}$$

$$\& \sin. u = \frac{c^{+u \sqrt{-1}} - c^{-u \sqrt{-1}}}{2 \sqrt{-1}}, \text{ quantités}$$

réelles, toutes les fois que l'arc u est réel. En ôtant les fractions de ces équations, les ajoutant ensuite, transposant, divisant par 2, substituant N au lieu de c , & $p\zeta$ au lieu de u , on aura $N^{+p\sqrt{-1}} = \cos. p\zeta + \sqrt{-1}. \sin. p\zeta$; mais en faisant $p\zeta = \frac{x\sqrt{g}}{a}$, on aura $N^{\frac{x\sqrt{g}}{a}\sqrt{-1}} = \cos. \frac{x\sqrt{g}}{a} + \sqrt{-1}. \sin. \frac{x\sqrt{g}}{a}$. Si on avoit retranché la seconde équation de la première, on auroit trouvé $N^{-\frac{x\sqrt{g}}{a}\sqrt{-1}} = \cos. \frac{x\sqrt{g}}{a} - \sqrt{-1}. \sin. \frac{x\sqrt{g}}{a}$. Ces équations nous serviront dans la seconde Partie de cet Ouvrage (Section 3^e n^o 290).

Nous avons supposé que $c^{\pm\zeta} = \left(1 \pm \frac{\zeta}{p}\right)^p = 1 \pm \frac{p\zeta}{p} + \frac{p \cdot (p-1) \cdot \zeta^2}{2p^2} \pm \frac{p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdot \zeta^3}{2 \cdot 3 \cdot p^3} \&c.$ en effet, puisque p est supposé un nombre infiniment grand, $p-1=p$, $p-2=p$, &c. & alors $c^{\pm\zeta} = 1 \pm \zeta + \frac{\zeta^2}{2} \pm \frac{\zeta^3}{2 \cdot 3} \&c$; car selon ce que nous avons dit dans les Courbes algébriques (47) $c^\zeta = 1 + \zeta + \frac{\zeta^2}{2} + \frac{\zeta^3}{2 \cdot 3} \&c$. Si donc on suppose ζ un nombre négatif, on aura $c^{-\zeta} = 1 - \zeta + \frac{\zeta^2}{2} - \frac{\zeta^3}{2 \cdot 3} \&c$.

On voit par-là que les Courbes représentées par les équations $y = \frac{c^{+x\sqrt{-1}} - c^{-x\sqrt{-1}}}{2}$, &

$$y = \frac{c + x \sqrt{-1} - c - x \sqrt{-1}}{2 \sqrt{-1}}, \text{ sont trans-}$$

cendantes ; car la première équation est la même que $y = \cos. x$ ($\cos. x$ désigne le cosinus de l'arc x), la seconde est la même que $y = \sin. x$. De même la Courbe de l'équation $y = \cos. l. x$ est transcendante, cette expression signifie que y est égal au cosinus d'un arc égal au logarithme de l'abscisse x .

3. On appelle *logarithmique* une Courbe $M b m n$ (fig. 1), dans laquelle les abscisses $a t$, $a p$, $a q$ &c. étant supposées en progression arithmétique, les ordonnées correspondantes sont en progression géométrique ; ainsi les abscisses correspondantes seront les logarithmes de ces ordonnées. Si l'on prend l'ordonnée $a b$ pour l'unité, les nombres $p m$, $q n$ plus grands que l'unité, auront des logarithmes positifs ; mais les nombres $P M$ plus petits que l'unité, n'auront que des logarithmes négatifs $a P$. Il est visible que les $P M$ allant toujours en diminuant, les $a P$ augmenteront à l'infini ; donc l'axe des x est l'asymptote de la logarithmique, dont l'équation est $x = b. l. \frac{y}{a}$, l désigne le logarithme hyperbolique. Supposant que c représente le nombre dont le logarithme hyperbolique $= 1$; en multipliant par $l. c = 1$, l'équation ci-dessus devient $x. l. c = b. l. \frac{y}{a}$, ou $\frac{x}{b} l. c = l. \frac{y}{a}$, ou en

ôtant les logarithmes, $c^{\frac{x}{b}} = \frac{y}{a}$, ou $y = a. c^{\frac{x}{b}}$. Si on substitue à la place de x des valeurs 1, 2, 3 &c. en progression arithmétique, les valeurs successives de y seront en progression géométrique.

4. On

4. On peut rapporter aux Courbes qui dépendent des logarithmes, celles qu'on appelle *exponentielles*, parce qu'il entre des exposants variables dans leur équation : Telle est la courbe de l'équation $y = x^x$, cette expression indique que les ordonnées sont proportionnelles aux puissances x des abscisses x . De cette équation on tire $\log y = x \log x$. Supposant $x = 0$, on a $y = 1$; si $x = 1$, l'on a $y = 1$. Si $x = 2$, y sera $= 2^2 = 4$; si $x = 3$, on a $y = x^x = 3^3 = 27$, &c. Donc en prenant l'abscisse $ac = x = 1$ (fig. 2), l'on aura $y = cd = 1$, on suppose que les x pris du côté de c sont positifs. Entre a & c on a $x < 1$; de sorte qu'en prenant $aq = \frac{1}{2}$, il vient $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Supposons maintenant $ag = -x$, l'on aura $y = (-x)^{-x} = \frac{1}{(-x)^x}$. Si $x = -1$, on aura $y = -1$; donc en supposant $ag = -1$, l'on aura l'ordonnée $gu = -1$, & le point u appartiendra à la Courbe. Si $x = -2$, l'on a $y = \frac{1}{4}$; donc à l'abscisse $af = -2$, il répondra une ordonnée positive fm , mais aucune négative. Si l'on suppose que les abscisses négatives aillent en croissant selon la progression 1, 2, 3, &c. & qu'on prenne leurs ordonnées infiniment proches les unes des autres, l'on aura des ordonnées alternativement positives & négatives, dont les extrémités formeront des deux côtés de l'axe, une infinité de points séparés les uns des autres, qui ne formeront pas une Courbe continue, mais qui donneront l'apparence d'une telle Courbe ; cette singularité n'a pas lieu dans les Courbes algébriques. Voyons si ces sortes de points ont lieu du côté des x positifs.

Supposant $x = \frac{1}{2}$, l'on a $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$; donc à l'ab-

scisse $a q = \frac{1}{2}$, il répond deux ordonnées égales $q n$, $q N$, l'une positive, l'autre négative ; & en supposant successivement $x = \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \&c. \frac{1}{7}, \&c.$ on verra facilement qu'aux fractions de dénominateur pair il répond deux ordonnées, l'une positive & l'autre négative, tandis qu'aux fractions de dénominateur impair il ne répond que des ordonnées positives ; donc du côté des x positifs, la Courbe a au-dessous de l'axe une infinité de points séparés les uns des autres.

5. Venons aux Courbes dans l'équation' desquelles il entre quelqu'arc circulaire, ou quelque expression dépendante de cet arc : telle est l'équation $\frac{y}{b} = a \sin. \frac{x}{c}$; de sorte que l'ordonnée est proportionnelle à l'arc a dont le sinus est égal à l'abscisse $\frac{x}{c}$.

A cause qu'au même sinus $\frac{x}{c}$ il répond une infinité d'arcs, l'ordonnée y fera une fonction infinie & coupera la Courbe en une infinité de points.

Soit s le plus petit arc correspondant au sinus $\frac{x}{c}$, n la demi-circonférence, les valeurs de y (en faisant $b=1$) seront les suivantes s , $n-s$, $2n-s$, $3n-s$, $4n-s$, $5n-s$, &c. $-n-s$, $-2n-s$, $-3n-s$, $-4n-s$, &c. Prenant donc $C a B$ (fig. 3) pour l'axe & le point a pour l'origine des abscisses, & faisant $x = 0$, les ordonnées y seront $a A$, $a A'$, &c. $a b$, $a b'$, &c. Parceque l'arc correspondant au sinus $\frac{x}{c} = 0$, est $= n$, $2n$, &c. $-n$, $-2n$, &c., l'appliquée correspondante à l'abscisse $a P$ coupe la Courbe en une infinité de points m , m' , &c. M , M' , &c. & l'on aura une infi-

mité d'ordonnées $y = Pm = b.s$, $Pm' = b.(n-s)$, &c. de sorte que la Courbe sera composée d'une infinité de portions semblables. En supposant $aB = aA = n$, & $b = 1$, les intervalles pp , ff seront $= 2.n$. Si l'on suppose $x = c$, l'on aura $\frac{x}{c} = 1$; donc alors le sinus correspondant aux points B & C sera égal au rayon qu'on suppose $= 1$; or le rayon est le plus grand des sinus; donc l'ax. des x est terminé aux points B & C.

M. Leibnitz appelle cette Courbe *ligne des sinus*, parce que par son moyen on trouve aisément le sinus d'un arc quelconque. En effet puisque $\frac{y}{b} = a \sin. \frac{x}{c}$,

on aura réciproquement $\frac{x}{c} = \sin. a. \frac{y}{b}$. Si on suppose $c = b = aC = CB = 1$, l'abscisse $aB = x$ sera égale au sinus de l'arc y ; & supposant que $y = Pm$ est l'arc de 10 degrés, aP sera le sinus de 10. degrés.

Si on suppose $\frac{y}{b} = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{c}$, on aura $\frac{x}{c} = \cos. a. \frac{x}{b}$; ainsi l'on a en même temps la ligne des cosinus. En supposant $y = a. \text{tang. } x$ nous aurons l'équation d'une courbe transcendante qu'on appelle la ligne des tangentes. On aura aussi la ligne des cotangentes en faisant $y = \cot. a. x$; celle des sécantes en faisant $y = \sec. a. x$; & celle des cosécantes en supposant $y = \csc. a. x$.

6. Si on divise la circonférence d'un cercle (fig. 4) aussi-bien que son rayon en un même nombre de parties égales, & qu'ayant tiré des rayons à tous les points de division de la circonférence, on prenne sur le rayon ab correspondant à la première

division, la première partie cm du rayon, la seconde sur le second rayon ce , &c. & qu'on fasse passer une Courbe par tous les points ainsi déterminés, en supposant qu'on a divisé la circonférence aussi bien que le rayon en une infinité de parties, on aura la Courbe $cm p n a$ qu'on appelle *spirale d'Archimède*. On peut concevoir cette Courbe formée par le mouvement d'un point n qui coule sur le rayon de c en g & le parcourt uniformément, tandis que l'extrémité g du même rayon parcourt la circonférence d'un mouvement uniforme. Si on suppose que le point g étant de retour en a on ait décrit un cercle d'un rayon double cq , & que ce rayon fasse encore une révolution autour de c , pendant que le point n parcourt aq , l'on aura une seconde spirale, qui ne sera que la continuation de la première; on peut en continuer la description, en supposant ensuite un rayon triple, &c. Soit le rayon $ac = r$, la circonférence $ahfa = c$, l'abscisse circulaire $ab = x$, l'ordonnée $cm = y$; par la propriété de la spirale, l'on a, $cm : cb :: ab : abga$, ou $y : r :: x : c$; donc $cy = rx$: telle est l'équation de cette Courbe. Si on suppose $cm = y = \frac{r}{6}$, il est visible que $ab = x$ fera $= \frac{c}{6} =$ l'arc de 60° .

Si l'on prend $cp = y = \frac{r}{3}$, on aura $x = \frac{c}{3} =$ l'arc de 120° .

On peut voir par-là que cette spirale peut servir à diviser le cercle en un nombre quelconque de parties égales; mais la difficulté consiste à décrire cette Courbe d'une manière exacte.

Si on suppose que $y^m : r^m :: x^n : c^n$, on aura $c^n y^m = r^m x^n$, équation aux spirales de tous les genres. Ces spirales sont nommées *paraboliques*.

lorsque m & n sont des nombres positifs, & *hyperboliques* lorsque l'un des deux exposants est négatif, & il est visible que si c, r, x, y exprimoient des lignes droites, l'équation seroit aux paraboles dans le premier cas, & aux hyperboles dans le second cas : On suppose dans le premier cas que l'un des exposans m , ou n est différent de l'unité. En supposant $m = +1$, & $n = -1$; & faisant $r \times c = a^2$, l'on aura $y.x = a^2$, équation qui désigne une *spirale hyperbolique* (on la désigne communément par le nom de *spirale hyperbolique*, & nous lui donnerons le même nom dans la suite de cet Ouvrage). De l'équation $y.x = a^2$ l'on tire $y = \frac{a^2}{x}$; donc pour une autre ordonnée y' , l'on aura $y' = \frac{a^2}{x'}$; ainsi

$$y : y' :: \frac{a^2}{x} : \frac{a^2}{x'} :: \frac{1}{x} : \frac{1}{x'} :: x' : x ; \text{ c'est-à-dire}$$

que dans cette Courbe les ordonnées sont en raison inverse des abscisses; mais ces abscisses sont circulaires & proportionnelles à l'angle que décrit le point n pendant le mouvement du rayon cg . Donc dans la spirale hyperbolique les ordonnées sont en raison inverse des circulations; c'est-à-dire, que si le rayon fait deux circulations, l'ordonnée correspondante à la première fera double du rayon correspondant à la seconde; & par conséquent le rayon correspondant à un angle sous-double* sera double du rayon correspondant à un angle double.

* Si on imagine un arc de 300 degrés, on peut concevoir qu'une ligne a tourné autour du centre de cet arc, de manière que son extrémité a décrit cet arc ou un arc égal au triple d'un arc de 100 degrés; c'est-à-dire, plusieurs arcs qui valent ensemble 300 degrés. Si l'arc décrit est

Pour décrire les spirales , il faut trouver la valeur de l'arc correspondant à chaque rayon , après quoi on les décrira aisément par des points , comme si elles étoient algébriques , & cela d'autant plus exactement que l'on prendra des valeurs de ces arcs plus exactes.

7. En supposant que s représente un angle quelconque , ou l'arc qui mesure cet angle pris dans un cercle dont le rayon $= 1$, la Courbe définie par $s = n. L. \frac{r}{a}$ est appelée *spirale logarithmique*. Dans cette Courbe (fig. 5) les angles s autour du point C , ou les arcs pris dans la circonférence dont le rayon $= 1$, & qui sont proportionnels aux angles s , sont proportionnels aux logarithmes des rayons y Si l'on suppose $n = 1 = a$, il vient $s = l. y$; donc en supposant les angles s , ou les arcs dont nous venons de parler en progression arithmétique , les rayons correspondants (que je suppose représentés par CA , C n , CB , &c.) seront en progression géométrique. Si CA représente le rayon (que je suppose $= 1$) du cercle générateur , il est visible qu'on pourra prendre sur ce rayon une infinité de parties en progression géométrique décroissante ; de sorte que la Courbe fera une infinité de révolutions autour du point C avant de parvenir à ce point. On pourra aussi prendre les rayons C A , C m , &c. en progression géométrique ascendante.

C'est une propriété de cette Courbe que tous ses rayons C m , C n font avec elle des angles égaux. Pour le prouver soit l'angle A C $m = s$, le rayon

de $360^\circ \div 100^\circ = 460^\circ$, il mesure un certain nombre d'angles qui valent ensemble 460° , & j'appelle leur somme un angle de 460° , &c.

$Cm=y$; par l'équation de la Courbe, s est $=n. L. \frac{y}{a}$,
 ou $\frac{s}{n} = L. \frac{y}{a}$, ou en multipliant le premier mem-
 bre par $l.c = 1$, $\frac{s}{n} l.c = l. \frac{y}{a}$, & faisant dispa-
 roître les logarithmes, $c^{\frac{s}{n}} = \frac{y}{a}$, ou $y = a c^{\frac{s}{n}}$. Pre-
 nant ensuite un angle plus grand $ACn = s + u$,
 on aura $Cn = y' = a. c^{\frac{s+u}{n}} = a. c^{\frac{s}{n}}. c^{\frac{u}{n}}$. Du cen-
 tre C avec le rayon Cm décrivant un arc ml qui
 fera $=yu^*$, on aura $nl = Cn - Cm = a. c^{\frac{s}{n}} \times$
 $(c^{\frac{u}{n}} - 1)$; or $c^{\frac{u}{n}} = 1 + \frac{u}{n} + \frac{u^2}{2.n^2} + \frac{u^3}{2.3.n^3} + \&c^{**}$.
 Donc $c^{\frac{u}{n}} - 1 = \frac{u}{n} + \frac{u^2}{2.n^2} + \frac{u^3}{2.3.n^3} + \&c$; ainsi nl est $=$
 $a c^{\frac{s}{n}} \cdot \left(\frac{u}{n} + \frac{u^2}{2.n^2} + \&c. \right)$. Par conséquent $\frac{ml}{nl} =$

$$\frac{\frac{u}{n} + \frac{u^2}{2.n^2} + \frac{u^3}{2.3.n^3} + \&c.}{1 + \frac{u}{2.n} + \frac{u^2}{2.3.n^2} + \&c.}, \text{ en}$$

* Car le rayon Cm est à l'arc ml , comme le rayon 1 est à l'arc
 qui mesure l'angle mCl ; ainsi $1 : u :: y : \frac{yu}{1} = yu = ml$.

** Nous avons vu (2) que $c^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \&c.$;
 donc en supposant $x = \frac{u}{n}$, on aura $c^{\frac{u}{n}} = 1 + \frac{u}{n} +$
 $\frac{u^2}{2.n^2} + \&c.$

multipliant le numérateur & le dénominateur par n , & les divisant par u . Mais si l'on suppose l'angle mCn infiniment petit, la portion mn de la Courbe sera censée se confondre avec la tangente au point n ; c'est pourquoi en faisant $n l : l m :: 1 : \frac{l m}{n l}$, on aura la tangente de l'angle fait par la tangente de la Courbe & le rayon Cn , en supposant le sinus total = 1. Donc faisant $u = \frac{1}{\infty}$, la tangente de l'angle $m n C$ deviendra

$$\frac{n}{1} = n; \text{ ainsi cet angle } x + \frac{0}{2 \cdot n} + \frac{0}{6 \cdot n^2} \text{ \&c.}$$

est constant. Si l'on suppose $n = 1$, cet angle sera demi-droit, parce que la tangente de 45° est égale au rayon, qu'on fait ici = 1. Dans ce cas la spirale logarithmique est dite *demi-droite*.

8. Si on divise la circonférence d'un quart de cercle abc (fig. 6) en plusieurs parties égales, & qu'ayant mené des points de division, des rayons au centre du quart de cercle, on divise le rayon ab en un même nombre de parties égales aux points h, p, k , &c. & que par ces points on mène des parallèles au rayon bc jusqu'à la rencontre des rayons bf, bg, bs , la Courbe $aimno$, qui passe par les points de rencontre, est appelée *quadratrice de Dinostrate*. Par la nature de cette Courbe l'arc as est à la circonférence asc , comme l'abscisse ah est au rayon ab . Faisant donc l'arc $as = x$, la circonférence $afc = a$, l'abscisse $ah = y$, & le rayon $ab = r$, l'on aura $x : a :: y : r$; donc dans cette Courbe on aura $rx = ay$. Pour trouver le point o où la Courbe rencontre le rayon bc , on supposera la ligne bk infiniment petite, l'arc gc sera aussi infiniment petit & pourra être regardé comme une partie infiniment petite de la tangente

au point c , tangente qui, par la propriété du cercle, est perpendiculaire au rayon bc . Cela posé les triangles semblables knb , gbc * donnent $bc : kn :: gc : kb$. Mais en supposant la ligne kb infiniment petite, le point n est censé se confondre avec le point o ; de sorte que $kn = bo$. De plus par la nature de la quadratrice, $gc : kb :: afc : ab$ ** ; donc $bc = ab : bo :: afc : ab$, ou $r : bo :: a : r$, d'où l'on tire $bo \times a = r^2$, ou $a : r :: r : bo$, c'est-à-dire que bo est troisième proportionnelle à la circonférence du quart de cercle & au rayon; & par conséquent la circonférence du quart de cercle est troisième proportionnelle à la ligne bo & au rayon.

COROLLAIRE. Donc si on pouvoit trouver géométriquement le point o , on trouveroit aussi géométriquement la longueur du quart de cercle, & en quadruplant l'on auroit la longueur de la circonférence entière, d'où dépend la quadrature du cercle. Mais on ne peut trouver ce point géométriquement : car en supposant kn infiniment proche de bc , cette ligne ne peut couper le rayon bg lorsque le point g se confond avec le point c , parce que kn , étant parallèle à bc , est alors parallèle à bg , ou si l'on veut, parce que kn se confond alors avec bg & bc .

9. Si on suppose que le rayon ab (fig. 7) se meuve le long de bc parallèlement à lui-même, de sorte qu'il parcoure le quart de cercle adc dans le même

* A cause des angles droits en c & en k , & des angles alternes internes knb , nbc .

** Car ak & ag étant des parties semblables du rayon & du quart de cercle par la nature de la Courbe, les restes kb & gc seront aussi des parties semblables du rayon & du quart de cercle; mais par la nature de la Courbe $r : a :: ka : ag$; donc $kb : gc :: r : a$, ou $gc : kb :: a : r$.

rems que la ligne pm restant toujours parallèle à bc , parcourra la ligne ab ; de manière que l'on ait toujours la circonférence adc du quart de cercle : $ad :: ab : ap$, la Courbe qui passera par tous les points m d'intersection des deux droites fd , pm , est appelée *quadratrice de Tschirnaus*, qui l'a inventée à l'imitation de celle de *Dinoftrate*. Faisant $adc = a$, $ad = x$, $ap = y$, $ab = r$, nous aurons $a : x :: r : y$; donc l'on a dans cette Courbe $rx = ay$.

Si l'on veut avoir une équation différente pour la quadratrice de *Tschirnaus*, on remarquera que $pm = od$ est $= \sin. x$, &c que par l'équation $rx = ay$, l'on a $y = ap = \frac{rx}{a}$; donc

$bp = r - \frac{rx}{a}$. Mais le triangle rectangle $pm b$ donne

$$(\text{en supposant } bm = z) z^2 = (\sin. x)^2 + \left(r - \frac{rx}{a}\right)^2,$$

$$\text{ou } a^2 z^2 = a^2. (\sin. x)^2 + (ar - rx)^2.$$

Dans la quadratrice de *Dinoftrate* (fig. 6), en tirant sd parallèle à bc , l'on a $sd = \sin. x$, $bd = \cos. x$; &c par l'équation $rx = ay$, il vient $y = ah = \frac{rx}{a}$; or les triangles semblables bsd , bih donnent $bd : bs :: bh : bi$, ou $\cos. x : r :: r - \frac{rx}{a} : z$, en supposant

$$bi = z; \text{ donc } z = \frac{ar^2 - r^2 x}{a. \cos. x}.$$

Cependant cette équation ne fait point trouver le point o , car en faisant $x = a$, l'on a $z = \frac{r. a^2 - r^2. a}{0} = \frac{0}{0}$, équation

qui n'apprend rien, ce qui semble prouver l'impossibilité d'avoir le point o géométriquement.

10. Si sur la droite AB on fait rouler un cercle

$aM\gamma$ (fig. 8) qui la touche d'abord au point a , ce point en faisant un tour entier décrira par un mouvement composé du rectiligne & du circulaire une Courbe $a\tau B$ qu'on appelle *cycloïde* ou *roulette*. La droite aB se nomme la *base*, qui est évidemment égale à la circonférence du cercle roulant, dont tous les points s'appliquent successivement sur cette ligne. La perpendiculaire ft tirée sur le milieu de la base aB & passant par son sommet t , s'appelle l'*axe*. Le cercle roulant $aM\gamma$, ou $d\theta\gamma$ qui est le même dans toutes les situations, s'appelle le *cercle générateur*.

Si le cercle générateur en roulant uniformément est supposé être parvenu dans la situation $d\theta\gamma$, il est visible que tous les points de l'arc cd s'étant appliqués successivement sur ad , on a l'arc $dc = ad$. Si par le point c on tire cl parallèle à Ba , les arcs gf , cd , compris entre les mêmes parallèles, seront évidemment égaux, aussi-bien que leurs cordes, qui sont également inclinées à la tangente commune df , & par conséquent parallèles entre elles; donc $cgfd$ sera un parallélogramme & $df = cg$. Mais la base aB étant égale à la circonférence entière du cercle générateur, sa moitié af doit être égale à la demi-circonférence fgt . D'autre côté l'arc dc est $= ad = fNg$; donc $df = cg = gPt$; ainsi l'ordonnée $cg(y)$ est égale à l'abscisse circulaire $gPt = x$; de sorte que dans la cycloïde l'on a $y = x$. Si l'on fait la demi-circonférence $fgt = a$, la demi base $= b$, l'on aura toujours $b : a :: y : x$; donc $bx = ay$. Si l'on suppose que $C : D :: x : y$, on aura une cycloïde, qu'on appelle *allongée* lorsque $D > C$ & accourcie dans le cas contraire; ainsi l'équation de ces cycloïdes sera $y = \frac{Dx}{C}$.

Puisque les lignes PQ , nq sont égales aux arcs τP , τn , si l'on mène qr parallèle à PT tangente du cercle, on aura $qr = nP = Qr$, & le triangle Qrq semblable à qnT , sera isocèle; donc $PQ = PT$. Mais l'angle DPT extérieur au triangle QPT est double de TQP ; donc sa moitié τPD (car l'angle TPD a pour mesure la moitié de l'arc $P\tau D$, & τPD a pour mesure la moitié de τD , ou de τP) est $= TQP$; donc la tangente QT de la cycloïde est parallèle à la corde correspondante $P\tau$ du cercle générateur.

Si l'on veut rapporter le point c de la cycloïde à l'axe τf en faisant $ck = y$, on remarquera que $ck(y) = cg + gk = \tau Pg + gk = x + \sin. x$. Et pour les cycloïdes allongées ou accourcies, l'on aura $y = \frac{Dx}{C} + \sin. x$.

REMARQUE. En supposant toujours $gPt = x$ & $gc = y$, si l'on fait $C^n : D^n :: x^n : y^n$, ou $C^n y^n = D^n x^n$, on aura des Courbes que nous appellerons *cycloïdes de tous les ordres*.

11. Si l'on imagine qu'un fil enveloppant la demi-cycloïde $d mA$ (fig. 9) se développe successivement, en sorte que l'extrémité d de ce fil décrive la Courbe dnh , il est évident que chaque partie du fil tendu (que nous appellerons *rayon de la développée*) est toujours égale à l'arc correspondant de la Courbe; que lorsque le point décrivant est arrivé en h après tout le développement du fil, alors ce rayon est égal à la demi-cycloïde $d mA$. Il est visible que l'extrémité du fil décrit à chaque instant un arc circulaire infiniment petit, sur lequel le rayon correspondant mn est toujours perpendiculaire, & que la Courbe dnh est composée de l'assemblage de tous ces petits arcs. De plus le rayon

mn est toujours tangente à la demi-cycloïde dmA , n'étant autre chose que le prolongement rectiligne d'un arc infiniment petit (de la Courbe) situé en m , arc qu'on peut regarder comme une ligne droite infiniment petite; donc par la propriété de la cycloïde mn est parallèle à la corde dp . Maintenant si on suppose que la Courbe dnh est une demi-cycloïde égale à la développée dmA , on aura mn perpendiculaire à la tangente nT ; or nT est parallèle à lh ; ainsi ng est parallèle & égale à li . Mais l'angle $lig = ngd$ est $= gdp$; donc les arcs pop , lMi (dont les moitiés mesurent les angles gdp , lig) sont égaux aussi-bien que leurs cordes; ainsi $li = ng = dp = gm$; donc $mn = dp + ng$ est $= 2dp$; c'est-à-dire, que le rayon de la développée est égal au double de la corde correspondante du cercle générateur; donc la demi-cycloïde est double du diamètre du cercle générateur, & la cycloïde entière est quadruple du même diamètre.

REMARQUE. Nous avons supposé que la Courbe dnh est une demi-cycloïde égale à la développée dmA ; or cela est en effet, car supposons que dnh est une Courbe différente, dans ce cas en décrivant une demi-cycloïde qui passe par le point d & dont la demi-base soit $di = BA$, on auroit deux Courbes différentes qui auroient le point d commun & sur lesquelles tous les rayons mn seroient perpendiculaires; or cela est impossible: car alors tous les petits arcs de ces Courbes situés sur les rayons mn seroient parallèles, & par conséquent les arcs situés en d le seroient aussi. Mais ces arcs se confondent en d ; donc ils doivent se confondre par-tout; donc ces deux Courbes ne sont pas différentes.

COROLLAIRE I. Nous venons de voir que mn

tangente de la demi-cycloïde dA au point m étoit parallèle à la corde dp ; donc pour mener une tangente à une cycloïde au point m , il suffira, après avoir tiré l'ordonnée mp & la corde pd , de mener la ligne mn parallèle à la corde pd . Donc (fig. 8) pour mener la tangente ch au point c de la cycloïde $actB$, on tirera l'ordonnée cg , la corde correspondante gt , & la ligne ch parallèle à cette corde sera la tangente demandée. Mais l'angle inscrit fgt appuyé sur le diamètre tf , est droit; donc l'angle dch dont les côtés sont parallèles à ceux de l'angle fgt , est droit aussi, & la ligne dc est perpendiculaire sur la tangente ch .

COROLLAIRE II. Si l'on attache un corps à l'extrémité M du rayon tM de la développée cB (fig. 10), qu'on suppose une demi-cycloïde, le corps M parcourra la demi-cycloïde Bmf pendant le développement de la demi-cycloïde cCB . Le même corps parcourra l'autre demi-cycloïde fPA pendant que le fil cf enveloppera la demi-cycloïde cTA . Si donc cA & cB sont supposées des lames cycloïdales, le pendule cf pourra osciller dans une cycloïde BfA .

12. PROBLÈME. *Trouver le temps de la description d'un arc quelconque Mf par un corps M mis en mouvement par sa seule gravité dans un milieu sans résistance.* Supposant, comme on le démontre en Mécanique, que les temps sont, comme les racines des hauteurs verticales parcourues dans la descente; que les vitesses acquises sont dans le même rapport; que ces vitesses sont les mêmes lorsqu'un corps est tombé librement le long d'un plan vertical Lf , ou d'un plan incliné fg (ou du plan Courbe Mf) de même hauteur, on aura $\sqrt{(Lf)}$ proportionnelle à la vitesse dans gf ; & si le point g est supposé plus près du point f , $\sqrt{(Lf)}$ sera encore proportionnelle à la vitesse dans la nouvelle corde correspondante: or les cordes fg sont toujours parallèles aux arcs élémentaires correspondants de la cycloïde, comme

on peut le conclure de ce que nous venons de dire (11), & sont les moitiés des arcs Mf ; donc ces vitesses ou les \sqrt{Lf} sont toujours les mêmes pour les points g des cordes gf & les points M des arcs correspondants. Mais par la propriété du cercle, $Df : gf :: gf : Lf$ (voyez la Géométrie); donc $Lf = \frac{(gf)^2}{Df}$, ou $\sqrt{Lf} = \frac{gf}{\sqrt{Df}}$

$\frac{fM}{2\sqrt{Df}}$, à cause de $fM = 2fg$ (11); donc les vitesses

dans la cycloïde Mf sont comme les $\frac{gf}{2\sqrt{Df}}$, ou (à cause de la constante $2\sqrt{Df}$) comme les gf ; c'est-à-dire, que les vitesses sont comme les cordes, & par conséquent comme les doubles de ces cordes, ou comme les arcs Mf ; donc les vitesses sont comme les espaces parcourus; & partant les arcs Mf grands ou petits sont parcourus en temps égaux, ce qui est une belle propriété de la cycloïde.

Des Problèmes Mécaniques.

13. La solution d'un Problème est mécanique lorsqu'on emploie une ou plusieurs Courbes mécaniques pour le résoudre.

14. PROBLÈME I. Etant donnée une ligne a , en trouver une autre x qui soit à la ligne a comme $a^m : a$. Supposant décrite une logarithmique $n b M$ (fig. 1), cherchez sur cette ligne une ordonnée $ab = a$, & une autre ordonnée plus petite PM que vous supposerez $= a^0 = 1$, prenez ap en sorte que l'on ait $Pp : aP :: m : 1$, l'ordonnée mp sera la ligne x cherchée. En effet, par la propriété de la logarithmique, Pa étant le logarithme de $a = a^1$, Pp sera celui de Pm ; or $Pp : Pa :: m : 1$; donc Pp est le logarithme de $a^m = x$; ainsi la ligne cherchée x est $= pm$. Si m étoit un nombre négatif, le point p seroit situé à la gauche du point P .

15. PROBLÈME II. Etant donné un demi-cercle tsf , dont le diamètre est ts & le centre C (fig. 2), on demande de trouver un point m hors du demi-cercle, d'où ayant abaissé sur ts la perpendiculaire mp qui rencontre en D ce demi-cercle, la partie mD de cette perpendiculaire soit égale,

à l'arc tD correspondant, & que le rectangle $tp \times pm$ soit égal au carré du rayon tC . Supposant la chose faite, soit $tC = a$, $tp = p$, $pm = y$, l'arc $tD = x$, la ligne $mD = u$; fp sera $2a - p$. Par la nature du Problème on a $u = x$, équation à la cycloïde ordinaire; de plus $tp \times pm = (tC)^2$, ou $p.y = a^2$, équation à l'hyperbole entre les asymptotes. Supposant décrite la cycloïde $a t B$, je mène le rayon Cs & la ligne tH parallèles à fB , & prenant les lignes tf , tH pour asymptotes, je décris par le point s une hyperbole équilatère sm qui coupera la cycloïde au point cherché. En effet par la propriété de l'hyperbole, $tp \times pm$, ou $tp \times tH = tC \times tA = (tC)^2$, ou $p.y = a^2$; donc, &c.

SURFACES COURBES.

16. **I**L y a une si grande connexion entre les Courbes à double courbure & les Surfaces courbes, que nous ne devons pas parler des Courbes à double courbure sans avoir auparavant donné quelques notions sur les surfaces Courbes.

Supposons trois lignes (fig. 11) ap (axe des x), aq (axe des y), les lignes aq & ap sont perpendiculaires l'une à l'autre, & ar (axe des z), cette ligne est perpendiculaire au plan qap , & par conséquent aux lignes aq , ap . Le plan dans lequel se trouvent aq & ap , sera appelé le plan des x & des y ; le plan dans lequel se trouvent aq & ar sera appelé le plan des z & des y ; enfin le plan dans lequel se trouvent ar & ap , sera nommé le plan des z & des x .

17. **THÉORÈME.** Si on a une équation à trois variables x , z & y , je dis qu'elle exprimera toujours une surface. Car en donnant une valeur déterminée à la variable $ap = x$, cette équation n'aura plus que deux variables y & z , c'est-à-dire, pm & mn ; donc elle exprimera le lieu d'une ligne droite ou courbe dont pm & mn seront les coordonnées, mn étant supposée parallèle à ra , & pm parallèle à aq ; & comme l'on peut donner à x une infinité de valeurs déterminées & différentes, de manière que les points

points p, p soient infiniment proches, on pourra concevoir une infinité de lignes gn infiniment proches les unes des autres, & une surface $gnng$ dans laquelle se trouvent toutes ces lignes.

Si l'équation aux trois variables x, y, z est du premier degré, en considérant x comme un paramètre variable toutes les lignes gn seront des droites semblables (en regardant les quantités x, y & z comme déterminant seules le degré de l'équation, ainsi que cela suit de ce que nous avons dit sur les Courbes algébriques semblables), c'est-à-dire, également inclinées aux pm , & elles seront toutes situées sur une surface plane; mais si x monte au second degré, on ne pourra faire varier x qu'il n'y ait, pour ainsi parler, deux paramètres variables à la fois, ce qui rendra les lignes gn inégalement inclinées aux pm , & quoiqu'on les suppose droites, la surface sera courbe, c'est-à-dire, n'aura pas tous ses points dans un même plan; à plus forte raison elle le sera si les gn sont des lignes courbes.

18. PROBLÈME. Trouver l'équation de la surface d'une Sphere dont le centre est c , & acB un diamètre placé sur un plan donné de position cpm (fig. 12). Ayant pris un point quelconque n de la Sphere, abaissez la perpendiculaire nm sur le plan donné cpm , & du point m où cette perpendiculaire rencontre le plan, menez mp perpendiculaire au diamètre aB . Faisant ensuite le rayon de la Sphere, $ca = cB = cn = a$, les variables $cp = x$, $pm = y$ & $mn = z$, on aura par la propriété du triangle rectangle pnm , $(pn)^2 = y^2 + z^2$; mais le triangle rectangle cnp * donne $(cn)^2 = (pn)^2 + (cp)^2$, ou $a^2 = x^2 + y^2 + z^2$, équation cherchée.

19. PROBLÈME. Trouver l'équation de la surface d'un Cône droit (fig. 13). Supposons que le côté indéfini ra de l'angle constant acp , tourne autour de l'axe cp ; le côté ac décrira dans ce mouvement la surface d'un cône droit. D'un point quelconque n de cette surface abaissons la perpendiculaire nm sur le plan cpm , menons pm perpendiculaire à l'axe cp , & tirons pn . Il est visible que le

* cB étant perpendiculaire sur le plan du triangle pnm , est nécessairement perpendiculaire à pn .

triangle rectangle nmp donne $(pn)^2 = y^2 + z^2$ (cpn est supposé le plan des x & des y , que nous appellerons aussi le plan de la base). Supposant maintenant que le cosinus de l'angle acp ou de son égal nep est $= m$, & son sinus $= n$; à cause de pn perpendiculaire sur cp , on aura $m : n :: cp(x) : pn = \frac{nx}{m}$; donc en substituant, $\frac{n^2 x^2}{m^2} = y^2 + z^2$, ou $n^2 x^2 = m^2 y^2 + m^2 z^2$, équation cherchée.

20 PROBLÈME. Etant donnée une Courbe ca (fig. 14) avec son axe des abscisses cB , ses abscisses $cp = x$, ses ordonnées $pa = u$, on demande l'équation de la surface que décrira la Courbe en tournant autour de son axe cB . Prenant un point quelconque n dans cette surface, abaissez nm perpendiculairement sur le plan de la base cpa , menez mp perpendiculaire à l'axe cB & tirez pn . Le triangle rectangle pnm donne $(pn)^2 = (pa)^2 = u^2 = z^2 + y^2$, équation cherchée.

COROLLAIRE I. Si la Courbe est une parabole ordinaire, dont l'équation soit $ax = u^2$, l'on aura $ax = z^2 + y^2$, équation de la surface du paraboloidé acn . Si la parabole avoit tourné autour de sa tangente au sommet, l'équation étant alors $x^2 = au$, l'on auroit $u^2 = \frac{x^4}{a^2}$, & l'équation seroit $x^4 = a^2 z^2 + a^2 y^2$.

COROLLAIRE II. Si on fait tourner une hyperbole équilatère autour d'une de ses asymptotes, on prendra la valeur de u^2 dans l'équation $ux = a^2$ de cette hyperbole, ce qui donnera $x^2 = \frac{a^4}{x^2}$; donc l'équation cherchée sera $a^4 = z^2 x^2 + y^2 x^2$.

Soit la Courbe ca une parabole ou une hyperbole d'un genre quelconque, dont l'équation est $u^m = a^{m-1} x$,

l'on aura $u = a^{\frac{m-1}{m}} x^{\frac{1}{m}}$, $u^2 = a^{\frac{2m-2}{m}} x^{\frac{2}{m}}$; donc l'é-

quation sera $a^{\frac{2m-2}{m}} x^{\frac{2}{m}} = y^2 + z^2$. Si m est une quantité positive, on aura l'équation de la surface des paraboloides de tous les genres, si m est négative on aura

l'équation de la surface d'un hyperboloïde d'un genre quelconque. Si on suppose $a = 1$, ce qu'on peut toujours faire, on aura $x^2 = (y^2 + z^2)^m$.

COROLLAIRE III. L'équation de la cissoïde étant $u^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ (voyez les Courbes algébriques (71), u re-

présente ici l'ordonnée de la cissoïde), l'on aura $\frac{x^3}{2a-x} = z^2 + y^2$, équation de la surface du conoïde cissoïdal.

REMARQUE. Nous avons supposé que les coordonnées x & u étoient perpendiculaires l'une à l'autre; or c'est ce qu'on peut toujours obtenir dans les Courbes algébriques.

COROLLAIRE IV. Pour avoir l'équation de la surface formée par une Courbe qui tourneroit autour d'une ligne à laquelle les ordonnées ne seroient point perpendiculaires, ou chercheroit l'équation de la Courbe par rapport à des ordonnées perpendiculaires à cette ligne qu'on prendroit pour l'axe des x .

21. PROBLÈME. Soit proposé d'examiner la surface courbe de l'équation $xyx = b^3$ (fig. 15). En faisant $aP = x = 0$,

j'ai $yz = \frac{b^3}{0} = \infty$; or les lignes y & z se trouvent dans le plan QaR , lequel ne rencontre la surface courbe qu'à l'infini; c'est-à-dire, que ce plan est le plan asymptotique

de la surface. Faisant $x = \infty$, il vient $yz = \frac{b^3}{\infty} = 0$;

d'où l'on tire $y = 0$ & $z = 0$, ce qui marque que la Courbe a encore pour plans asymptotiques les plans RaP &

aPm . Supposant $x = d$, l'on a $yz = \frac{b^3}{d}$, ce qui donne

deux hyperboles opposées gn , $g'n'$, dont les asymptotes

sont mm' , sS , & la puissance $\frac{b^3}{d}$. La surface a deux parties

égales & semblables, renversées l'une à l'égard de l'autre, & qui contiennent une infinité d'hyperboles, que l'on trouve en faisant successivement $x = d$, $x = d'$, &c. La première de ces deux parties est au-dessus du plan de la base, & la seconde au-dessous.

Je fais ensuite x négatif & $= -d$, ce qui donne
 $y z = -\frac{b^2}{d}$, & parce que cette équation représente deux

hyperboles opposées $h H$ & $h' H'$ situées sur le plan $L M I$, ayant pour asymptotes les lignes $M N$, $L I$; la Courbe a encore du côté des x négatifs deux parties égales aux premières. En donnant de même des valeurs à y & ensuite à z , il ne sera pas difficile de trouver les équations & les Courbes qui en résulteront.

REMARQUE. C'est en donnant successivement différentes valeurs à chacune des variables, qu'on peut connoître la nature des Courbes par lesquelles passe la surface dont on a l'équation, ce qui suffit aussi pour faire connoître cette surface. Si en donnant à une inconnue une valeur négative quelconque, il en résulte une équation fautive, ou imaginaire, c'est une marque que la surface ne s'étend pas de ce côté; de même la surface ne s'étendrait pas du côté d'une inconnue positive, si toutes les valeurs positives de cette inconnue produisoient une équation fautive ou imaginaire. Si la supposition de $x = \infty$ donnoit $y = c$, la surface auroit pour plan asymptotique un plan parallèle à celui des z & des x , mais éloigné de ce plan à une distance $= c$. Si au contraire cette supposition donnoit $z = c$, alors le plan asymptotique seroit parallèle au plan de la base & éloigné de ce plan de la distance c . Si cette supposition donnoit une équation entre z & y qui exprimât une ligne droite, ou courbe, décrivant ce lieu sur le plan $R a Q$ des y & des z , & élevant dessus une surface composée d'une infinité de perpendiculaires à ce plan, cette surface seroit asymptotique à la surface courbe, qu'elle ne rencontreroit qu'à l'infini. Si l'équation qui résulte de la supposition de $x = d$, par exemple, donnoit une équation divisible en deux, ou plusieurs autres équations qui exprimeroient des lignes droites ou courbes, alors la surface passeroit par ces lignes tracées sur un plan parallèle à celui des y & des z , comme cela est évident. Il n'est pas difficile de voir qu'en faisant pour chacune des autres variables, ce que nous venons de faire pour x , on connoîtra les lignes par lesquelles doit passer la surface courbe, & par conséquent la nature de cette surface. Si l'équation est du premier degré, pour connoître la position de cette surface, qui dans

ce cas (17) est plane, on fera à la fois deux des variables $\equiv 0$, il en résultera une équation à une ligne droite, par laquelle la surface passera. Faisant ensuite $\equiv 0$, une de ces variables & celle qu'on avoit conservée dans la première équation, il en résultera une autre droite, par laquelle la surface doit passer. En faisant à la fois $\equiv 0$, les variables qu'on n'avoit pas supposées égales à la fois à 0 dans les deux premières opérations, on aura une troisième ligne, par laquelle doit passer la surface; or connoissant trois lignes situées dans les plans des z & des y , des z & des x , des x & des y , par lesquelles passe une surface plane, il est évident qu'on connoît sa position.

COURBES A DOUBLE COURBURE.

22. **U**NE ligne courbe, dont tous les points ne sont pas situés dans le même plan, est une *ligne à double courbure*: telle seroit la ligne qu'on formeroit en faisant tourner un compas sur la surface convexe d'un cylindre, ou d'un cône.

23. Soit une Courbe à double courbure $a n$, dont par conséquent tous les points ne sont pas situés dans un même plan (fig. 16), ayant pris les trois axes $a r$, $a q$, $a B$ perpendiculaires les uns aux autres, par le moyen desquels on détermine les trois plans des x & des y , des x & des z , des y & des z perpendiculaires l'un à l'autre, d'un point quelconque a de la Courbe je tire $n m$ perpendiculaire sur le plan des x & des y , par le point m je mene $m p$ perpendiculaire à $a p$, je fais $n m \equiv z$, $m p \equiv y$, $a p \equiv x$; de sorte que les variables z , y , x seront les coordonnées de la Courbe proposée. Si l'on a deux équations entre ces coordonnées, on pourra déterminer la nature de la Courbe: car en éliminant z par le moyen de ces équations, il en résultera une équation entre y & x qui déterminera la position du point m sur le plan $q a p$ des x & des y , & tous les points m déterminés par l'équation entre x & y donneront la Courbe $a m f$, dans laquelle se trouvent tous les points m correspondants à tous les points n de la Courbe à double courbure. La Courbe $a m f$ est appelée la *projection de la Courbe $a n$ sur*

le plan des x & des y *. Pour avoir la projection de la Courbe an sur le plan des y & des z , on éliminera x , & l'équation entre z & y qui en résultera, donnera la Courbe cherchée. En éliminant y on aura la projection sur le plan des z & des x . Une seule projection ne suffit pas pour faire connoître la Courbe an ; mais si pour tous les points m (supposés connus par la nature de la Courbe am) on connoît les perpendiculaires mn ou les z correspondants, on pourra construire la Courbe an ; or pour cela il suffit d'avoir une équation entre z & x , ou entre z & y , ou entre z , y & x . Dans le premier cas étant donnés $ap = x$, on pourra trouver z ; dans le second cas étant donnés pm ou y , on aura z , & dans le troisième étant donnés x & y , on aura z ; donc étant donnée la projection d'une Courbe à double courbure an sur le plan des y & des x , avec la projection de la même Courbe sur le plan des y & des z , on aura pour chaque valeur de $y = pm$, la valeur correspondante de $z = mn$. Il en sera de même, si au lieu de la projection sur le plan des y & des z , on a la projection sur le plan des x & des z ; car alors pour chaque ap l'on a le z ou mn correspondant; ainsi on pourra décrire la Courbe an . De plus si sur tous les points de la projection amf , on élève des perpendiculaires indéfinies pour avoir une surface cylindrique indéfinie **, & que de tous les points de la projection sur le plan des y & des z , ou des x & des z on élève des perpendiculaires à ces plans, les surfaces cylindriques qui en résulteront, se rencontreront évidemment dans des points qui formeront la Courbe à double courbure an . Donc si l'on a une surface dans laquelle soit contenue la Courbe à double courbure, la surface cylindrique élevée sur la projection de cette Courbe tracée sur un des plans dont nous venons de parler, rencontrera la surface en des points qui appartiendront à la Courbe à double courbure. On peut voir par-là comment l'intersection des deux surfaces peut donner une Courbe à double courbure.

* Il faut concevoir aq perpendiculaire à ap .

** Nous entendons ici par *surface cylindrique*, une surface quelconque qui enveloppe un solide d'une grosseur uniforme, dans toute sa longueur, que nous appellerons *cylindre*, & dont la circonférence de la base peut être une ligne différente de la circulaire.

24. PROBLÈME. *Etant données deux surfaces courbes qui ont les mêmes axes & les mêmes variables pour coordonnées, trouver la Courbe à double Courbure qui en sera la section ; c'est-à-dire, dans laquelle une surface rencontrera l'autre.* Le Problème se réduit à trouver deux des Courbes de projection de la Courbe à double courbure sur deux plans perpendiculaires l'un à l'autre : car les cylindres, élevés sur ces projections, formeront, par leur rencontre, la Courbe à double courbure cherchée ; mais pour trouver ces projections, il suffit de s'y prendre comme nous venons de le dire.

25. EXEMPLE I. Soit proposé de trouver la Courbe à double courbure qui est la section d'un parabolôide & d'un cône droit qui a le même sommet, mais dont les axes sont perpendiculaires l'un à l'autre ; ces axes sont pour le parabolôide celui des x , & pour le cône celui des y . L'équation de la surface du parabolôide est (20) $ax = y^2 + x^2$; mais celle de la surface du cône sera $\frac{n^2}{m^2} y^2 = x^2 + z^2$;

au lieu de $\frac{n^2}{m^2} x^2 = y^2 + z^2$ (19), parce que présentement les x sont à la place des y . Prenant la valeur de z^2 dans l'équation de la surface du parabolôide, & la substituant dans celle de la surface du cône, on aura l'équation $\frac{n^2 + m^2}{m^2} y^2 = ax + x^2$, qui donne une hyperbole pour la Courbe de projection sur le plan de la base. En substituant la valeur de y^2 dans l'équation de la surface conique, l'on aura $\frac{n^2}{m^2} ax - x^2 = \frac{n^2 + m^2}{m^2} z^2$, qui donne une

Ellipse pour la projection sur le plan des x & des z . Ainsi la Courbe à double courbure est celle qui a pour Courbe de projection sur le plan de la base une hyperbole, & pour Courbe de projection sur le plan des x & des z une Ellipse.

26. EXEMPLE II. Soient deux surfaces courbes ayant les mêmes axes, désignées par les équations $y^2 = x^2$ & $ax = y^2$, on demande les équations des projections de la Courbe à double courbure, qui seroit la section de ces deux surfaces. Prenant la valeur de z dans la seconde équation & la substituant dans la première, il vient $x^2 = ay^2$, équation de la Courbe de projection sur le plan de la base.

Prenant ensuite la valeur de x dans la même équation & la substituant dans la première, il viendra $y^3 = \frac{a^2 z^3}{y^2}$, ou

$y^5 = a^2 z^3$, pour l'équation de la Courbe de projection sur le plan des y & des z . En substituant la valeur de y dans la première équation, l'on aura $x^3 = a^3 z^2$ pour la Courbe de projection sur le plan des x & des z .

27. REMARQUE I. On peut voir par-là que pour connaître une Courbe à double courbure, il faut avoir au moins deux équations qui renferment à elles deux les trois variables x , y , z ; de sorte que les équations d'une Courbe à double courbure sont celles de ses Courbes de projection sur deux plans perpendiculaires l'un à l'autre.

28. REMARQUE II. Si ayant une Courbe à double courbure & une surface courbe, on veut savoir si la Courbe peut être décrite sur cette surface, il suffit de substituer d'abord la valeur d'une des inconnues, & ensuite la valeur de l'autre inconnue, prise de l'équation d'une des Courbes de projection, dans l'équation de la surface, pour voir s'il en résultera les équations des deux autres Courbes de projection.

29. REMARQUE III. Si l'équation d'une des Courbes de projection, que donnent les équations des deux surfaces courbes, dont l'intersection est supposée une Courbe à double courbure, est fautive ou imaginaire, comme si l'on trouvoit $x^2 + y^2 = -a^2$, ou $\sqrt{(x^2 + y^2)} = \pm \sqrt{(-a^2)}$, c'est une marque que les surfaces ne se coupent pas. Si la projection se réduit à un point, les surfaces ne se toucheront qu'en un point. Si l'équation de projection a un facteur du second degré, dont les racines soient imaginaires, on aura un point conjugué; c'est-à-dire, que les surfaces se toucheront en un point qui appartiendra à la Courbe à double courbure. Si l'équation a deux facteurs simples réels & égaux, les surfaces se toucheront dans une ligne droite. Si l'équation a plusieurs facteurs non-simples égaux, en égalant à 0 un de ces facteurs qui sera au moins du second degré, on aura la projection de la ligne de contact. Si on devoit qu'une Courbe dont on a les équations des trois Courbes de projection fût plane, en prenant l'équation générale du premier degré à trois variables (qui (17) dé-

figne une surface plane) $ax + by + cz + d = 0$, on substituerait successivement la valeur de chacune des deux variables prise des équations d'une des Courbes de projection, pour voir s'il en peut résulter celles des deux autres Courbes, ou bien des équations qui s'y puissent réduire en changeant la valeur des lettres constantes de l'équation générale ci-dessus. Si cela arrive, la Courbe est plane; dans le cas contraire elle est à double courbure.

30. PROBLÈME. *Etant données les équations des trois Courbes de projection d'une Courbe à double courbure, décrire cette Courbe.* L'équation de la Courbe de projection sur le plan de la base étant donnée, on décrira cette Courbe am (fig. 17). Sur cette Courbe, comme base, on élèvera une surface cylindrique perpendiculaire au plan de la base, à chaque $pm(y)$ on élèvera le z , ou mn correspondant, dont on déterminera la valeur par l'équation entre z & x , ou par l'équation entre y & z , & l'on fera passer par tous les points n , la Courbe à double courbure demandée. Il n'est pas difficile de voir qu'on pourroit se servir des autres Courbes de projection sur les deux autres plans, ce qui n'a pas besoin d'un plus grand détail. Si une certaine valeur de $ap = x$, ou de $pm = y$, donnoit z imaginaire, le point correspondant n seroit imaginaire; c'est-à-dire, que la Courbe seroit interrompue dans ce point. Mais s'il en résulteroit une valeur négative de z , dans ce cas il faudroit tirer mn au-dessous du plan de la base.

31. PROBLÈME II. *On propose d'examiner la Courbe à double courbure, dont les Courbes de projection sont sur le plan de la base une cissoïde dont $A c$ est l'axe, A le sommet, a le diamètre du cercle générateur, & sur le plan des y & des z une hyperbole équilatère & dont les asymptotes sont Ar , AQ , & dont la puissance est $= a^2$ (fig. 18).* L'on aura

par conséquent les équations $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$ & $a^2 = yz$.

ou $y = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}}$ & $z = \frac{a^2}{y}$. Supposant $x = 0$, il vient

$y = 0$ & $z = \frac{a^2}{0} = \infty$; donc la Courbe à double courbure ne rencontre l'axe des z qu'à l'infini; c'est-à-dire, que cet axe lui est asymptote. Faisant ensuite $x = a$, on a

$y = \infty$, & $z = \frac{a^2}{\infty} = 0$; de sorte que la Courbe à double courbure a pour asymptote ck , qui est l'asymptote même de la cissoïde. x augmentant, y augmente aussi, mais z diminue & la Courbe va en descendant depuis l'asymptote Ar , jusqu'à l'asymptote ck , en s'éloignant à l'infini de l'axe Ac ; & parce que y a deux valeurs égales, l'une positive, l'autre négative, & que la négative donne une valeur négative pour z , la Courbe à double courbure a encore une autre branche sS , égale & semblable à la précédente Nn , mais en dessous du plan de la base. Les asymptotes de cette branche sont les prolongements Ag , ch des asymptotes de l'autre branche.

32. Si l'on substitue la valeur de y , prise de l'équation $a^2 = yz$, dans la première $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$, pour avoir la troisième Courbe de projection désignée par l'équation $a^3 - a^2x = x^3z^2$, l'on trouvera encore deux autres branches. Ainsi pour avoir toutes les branches d'une Courbe à double courbure, il faut la considérer en employant ses trois Courbes de projection. Si les z correspondants aux y négatifs, par exemple, étoient imaginaires, la Courbe à double courbure n'auroit aucune branche du côté de ces y .

33. PROBLÈME. Soit proposée d'examiner la Courbe à double courbure (fig. 19), qui a pour Courbe de projection sur le plan de la base, une parabole dont a p soit l'axe, a le sommet, & le paramètre $= b$, & par conséquent l'équation $y^2 = bx$, & pour la Courbe de projection sur le plan raq , la Courbe de l'équation $b^2z^2 = y^4 + b^2y^2$. Supposant $x = 0$, l'on a $y = 0$, & $z = 0$; donc la Courbe passe par le point a . Toutes les valeurs qu'on donne à x en augmentant, font augmenter celles de y & de z ; donc la Courbe à double courbure va toujours en montant jusqu'à l'infini : car en supposant $x = \infty$, on trouve z infini, aussi-bien que y ; & parce que les équations $y^2 = bx$, ou $y = \pm \sqrt{bx}$ & $b^2z^2 = y^4 + y^2b^2$ ou $z = \pm \frac{y}{b} \sqrt{y^2 + b^2}$ donnent une valeur positive & une négative égales (l'une pour y , l'autre pour z), la Courbe à double courbure est composée de quatre parties égales & semblables, situées sur

la surface cylindrique élevée sur la parabole mag , deux sur la partie $ramt$, l'une au dessus, l'autre au dessous du plan de la base, & deux de même sur l'autre partie $ragt$. La Courbe de projection sur le plan rap , seroit une hyperbole équilatère, dont le sommet seroit en a , l'axe ap , & le centre en c distant de a de la quantité $\frac{b}{2}$.

34. REMARQUE. En tirant la ligne $am = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, on aura $am = z$; de sorte qu'en prenant toujours $mn = am$, on construira facilement la Courbe à double courbure.

35. PROBLÈME. Soit enfin proposé d'examiner & de décrire la Courbe à double courbure qui a pour Courbes de projection sur le plan de la base, la parabole de l'équation $ax = y^2$, & sur le plan des x & des z la transcendante $z = n.l.ax$ (fig. 20). En substituant la valeur de x prise dans la première équation, on trouve $z = n.ly^2 = 2n.ly$, pour la Courbe de projection sur le plan des y & des z . Cherchant (dans les tables) pour chaque $ap = x$ la valeur de $l.ax$ (en supposant, par exemple, $a = 10$, $x = 10$, $n = 3$, on aura $z = 3.l.100. = 3.2 = 6$), on trouvera aisément les z correspondants aux différentes abscisses ap . Faisant passer une Courbe par tous les points n ainsi trouvés, la Courbe à double courbure Tn , décrite sur la surface cylindrique élevée sur am perpendiculairement au plan de la base, sera d'autant plus exacte qu'on aura pris les z plus proches les uns des autres. Au reste l'on ne pourra avoir fort souvent que des valeurs approchées de z , parce que les logarithmes des tables ne sont la plupart exacts qu'à-peu-près. Mais parce que x augmentant à l'infini, son logarithme va toujours en augmentant, la Courbe à double courbure s'éloigne à l'infini du plan de la base & du point T . A cause de $a = 10$, si l'on fait $ab = \frac{1}{10}$, l'on aura $l.ax = l.1 = 0$; donc la Courbe Tn rencontrera la parabole au point T , extrémité de l'ordonnée bT . Et parce que les logarithmes $l.ax$ correspondent à $x < ba$ sont négatifs, & que $l.0 = -\infty$, la Courbe nT descendra au-dessous du plan de la base en s'approchant toujours de l'axe des z prolongé, qui sera son asymptote. Si l'on prend les y négatifs, l'équation $z = 2n.ly$ devient alors $z = 2n.l.-y$; or le logarithme

d'une quantité négative est imaginaire * ; donc la Courbe n'a point de branches du côté des ordonnées négatives p. g.

* En effet , parce que le logarithme de la racine est la moitié de celui du carré , on doit avoir $L. \sqrt{-1}$, ou $L. (-1)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} L. -1$, puisque -1 est le carré de $\sqrt{-1}$; or $L. \sqrt{-1}$ est imaginaire ; donc $\frac{1}{2} L. -1$ est aussi imaginaire. Soit supposé $L. -a = z$, on aura $L. (-a)^2 = 2 L. -a = 2 z$; mais $L. (-a)^2 = L. a^2 = 2 L. a$, quantité réelle ; d'où il paroît suivre que la quantité réelle $L. a$ & la quantité imaginaire z seroient les moitiés de la même quantité réelle $L. a^2$: de sorte qu'un nombre pourroit avoir deux moitiés , l'une réelle , l'autre imaginaire ; par conséquent le nombre a auroit également pour moitiés $\frac{a}{2}$

& $\frac{a}{2} + L. -1$. En effet le double de $\frac{a}{2}$ est $= a$, & le double

de $\frac{a}{2} + L. -1$ est $= a + 2 L. -1 = a + L. (-1)^2 = a$

+ $L. 1 = a + 0$, à cause de $L. 1 = 0$. A cette occasion l'on peut remarquer que $+ L. -1 = - L. -1$; car $-1 = \frac{+1}{-1}$; donc $L. -1 = L. 1 - L. -1$, (par

la nature des logarithmes) $= 0 - L. -1 = - L. -1$. Pour répondre à cette difficulté , supposons $z = L. a$, en multipliant le premier membre de cette équation par $L. c$, c étant le nombre dont le logarithme hyperbolique $= 1$, l'on a , $z. L. c = L. a$; chassant les logarithmes , il vient $c^z = a$,

ou $a = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \&c. (2)$. Mais dans

cette équation z aura à l'infini un exposant infini , & en transposant a dans le second membre , il viendra $0 = - a$

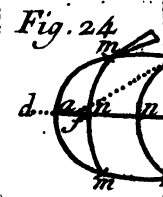
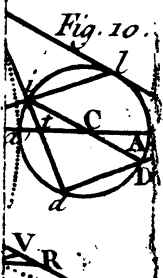
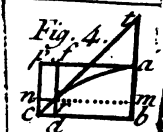
+ $1 + z + \frac{z^2}{2} \&c.$, équation qui donne une infi-

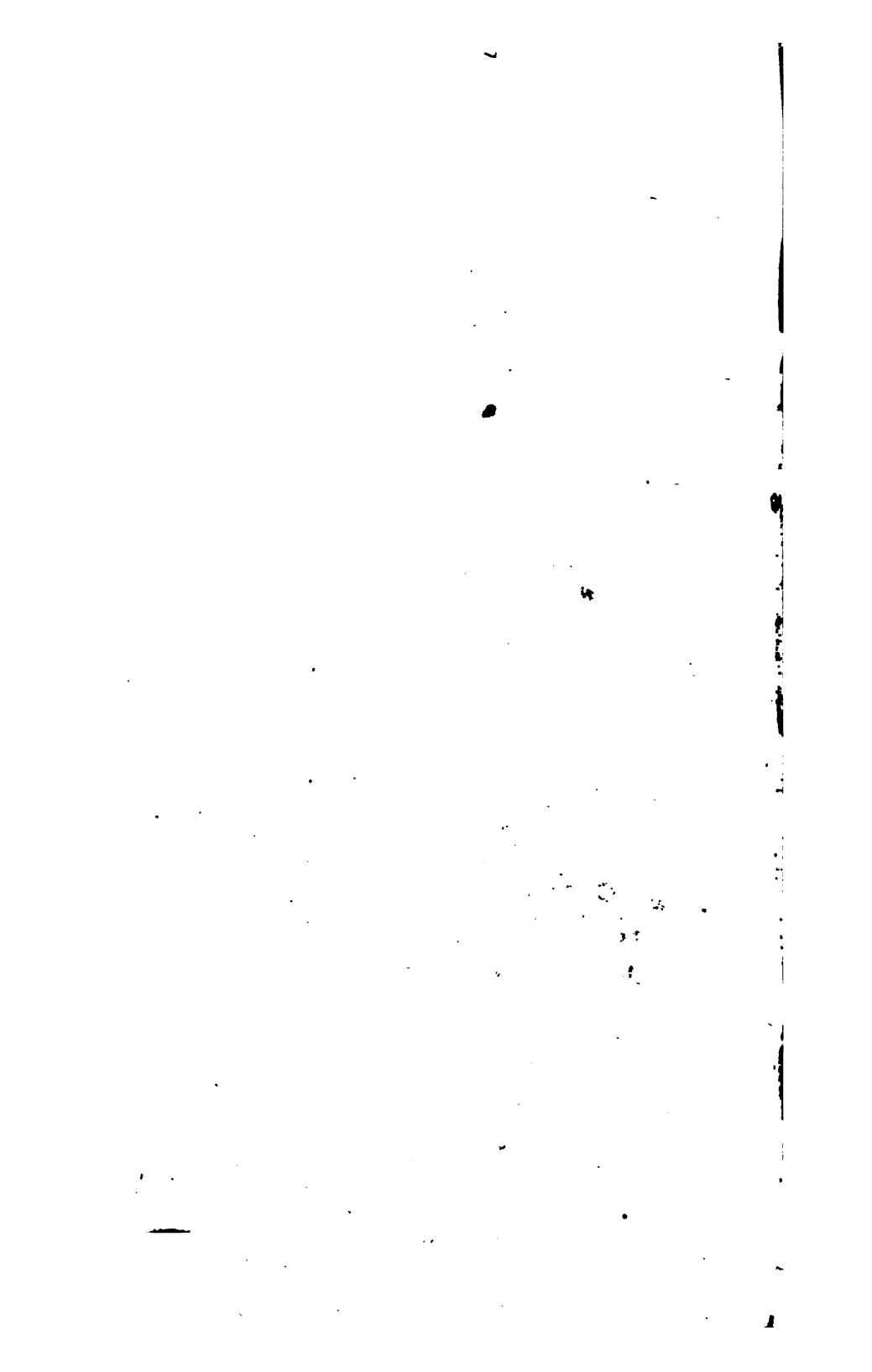
nité de valeurs pour $z = L. a$; mais rien n'empêche de supposer qu'entre ces valeurs il n'y en a qu'une seule de réelle ; donc rien n'empêche non - plus de supposer qu'un nombre a puisse avoir une infinité de logarithmes , dont un seul est réel , les autres étant imaginaires ; ainsi un

36. REMARQUE. Les Courbes à double courbure peuvent être algébriques, ou transcendentes. Elles sont transcendentes si toutes leurs Courbes de projection ne sont pas algébriques ; mais elles seront algébriques si toutes leurs Courbes de projection sont algébriques.

même nombre ne peut avoir qu'un seul logarithme tabulaire réel ; car on trouve le logarithme tabulaire d'un nombre en multipliant le logarithme hyperbolique de ce nombre par un nombre réel. Il paroît même qu'on doit prendre une valeur de x imaginaire pour le nombre $l. + a = l.b^2$, si $+ a$ résulte de $- b \times - b$. Car alors $l.b^2 = 2 l. - b$; or $l. - b$ est imaginaire ; donc dans ce cas $l. + a$ est imaginaire , ce qui est un paradoxe assez singulier. Si l'on vouloit que les logarithmes des quantités négatives , ou ceux des quantités positives , qui résultent d'une quantité négative multipliée par elle-même , fussent réels & égaux à ceux des quantités positives égales , la Courbe de la fig. 20 auroit du côté des y négatifs deux parties , l'une au-dessus , l'autre au-dessous du plan de la base.

FIN du Tome second.





27.

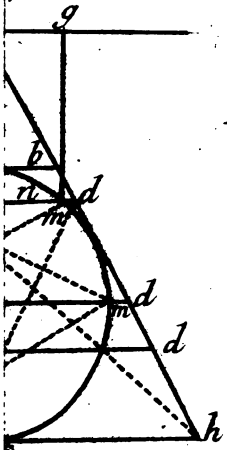


Fig. 28.

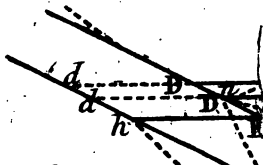


Fig. 31.

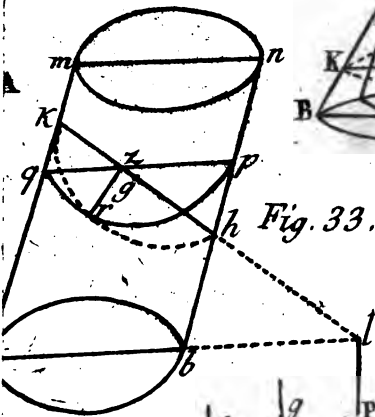
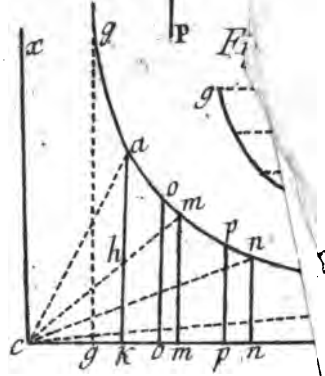


Fig. 33.

Fig. 37.



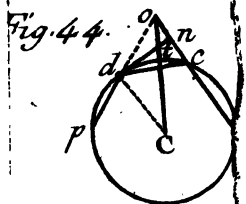


Fig. 45

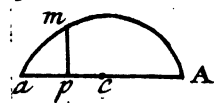
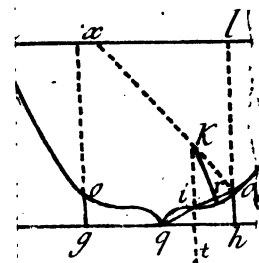
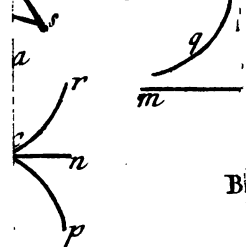


Fig. 50.



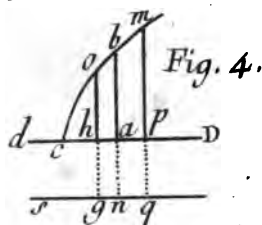


Fig. 7.

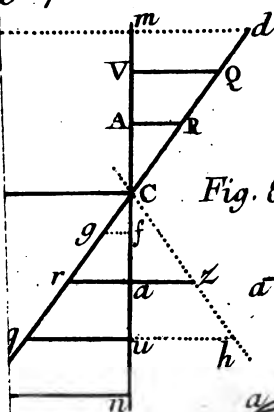


Fig. 8.

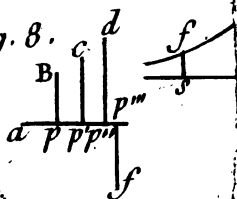


Fig. 18.

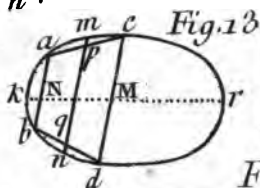
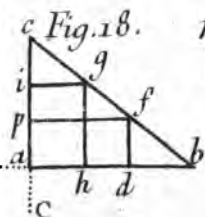
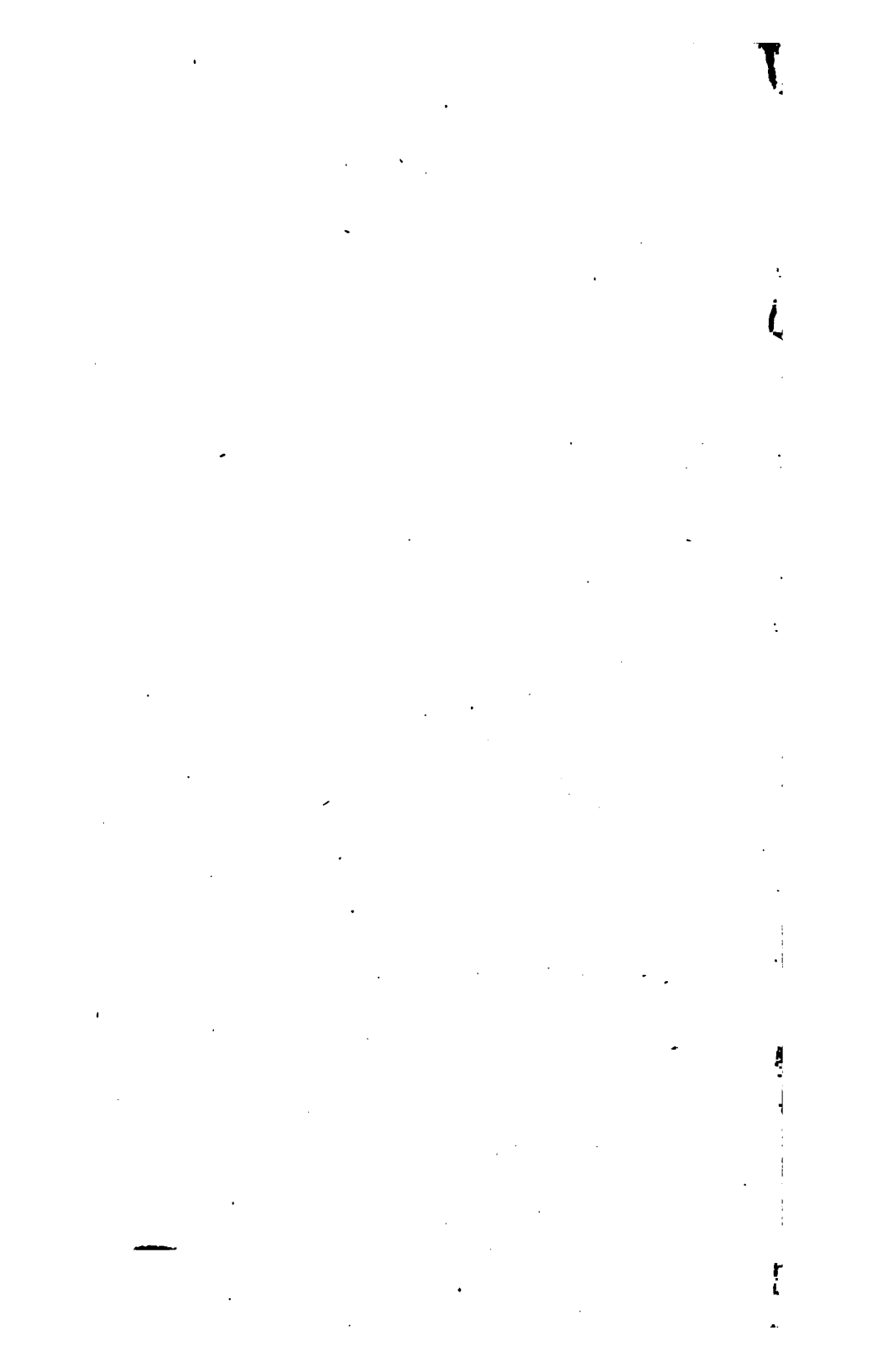
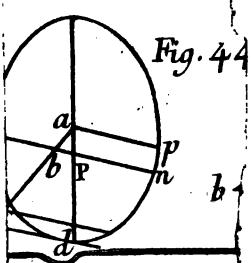
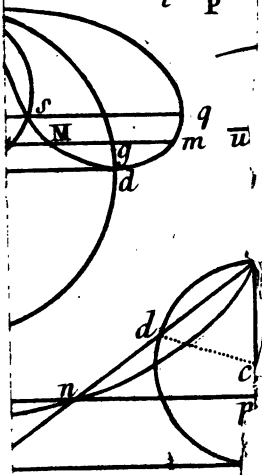
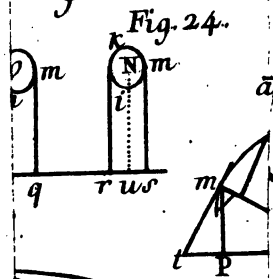
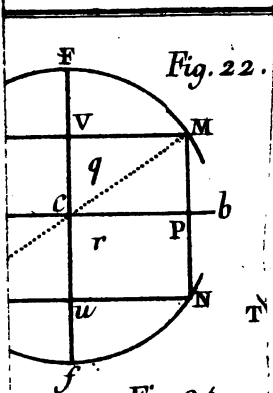
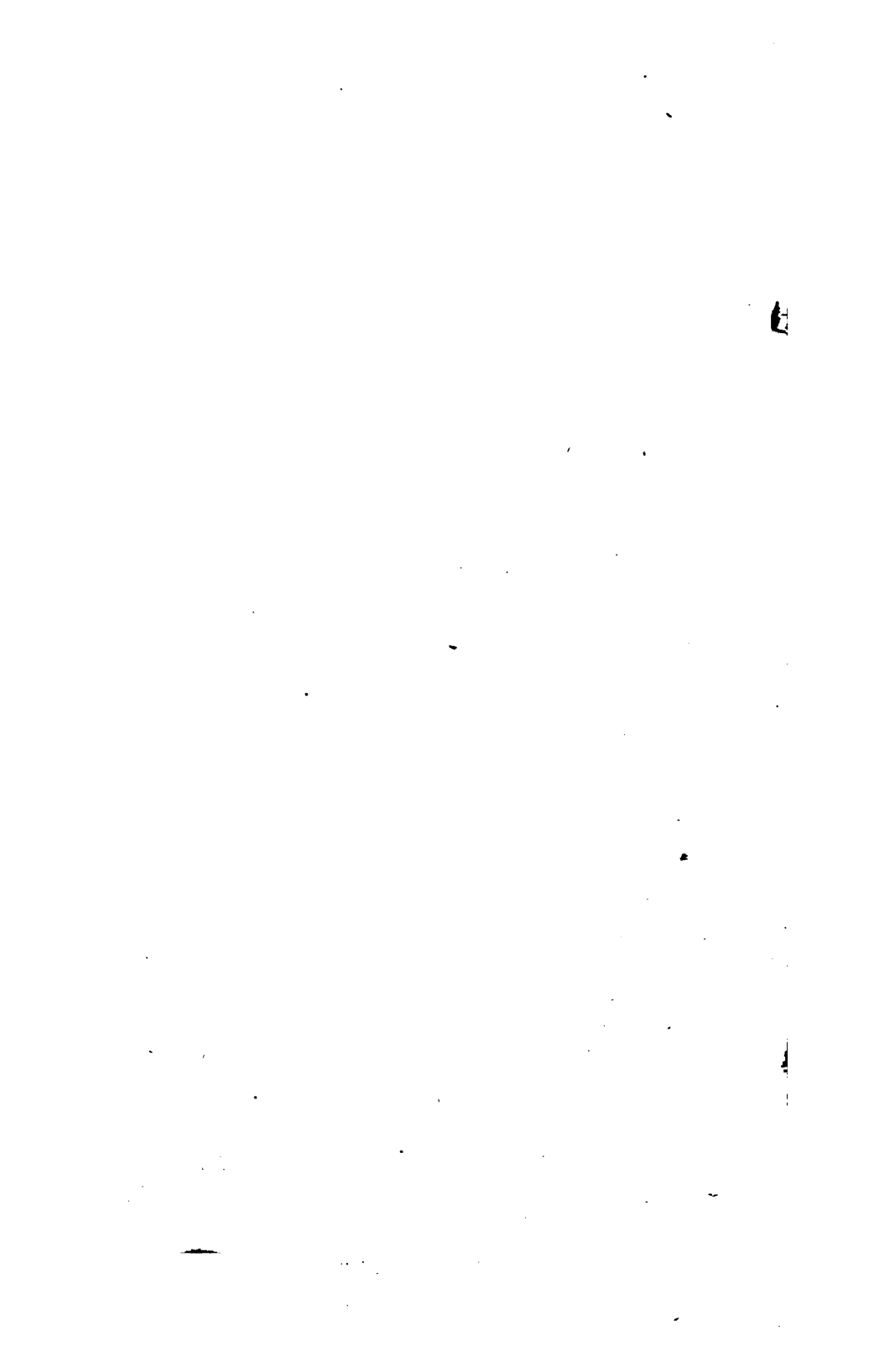


Fig. 17.









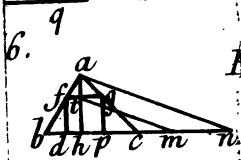
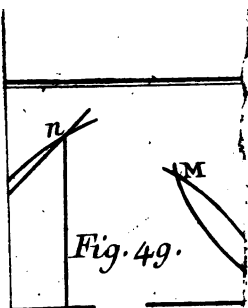


Fig. 59.

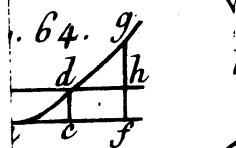
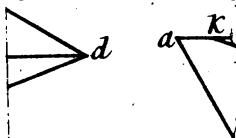


Fig. 65.

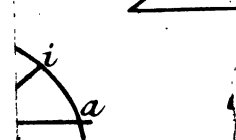
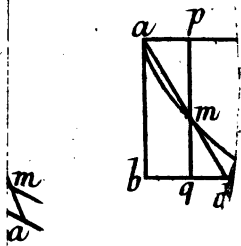
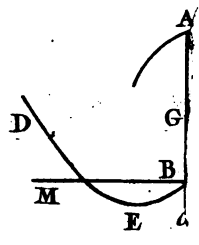


Fig. 74



F_2



Fig

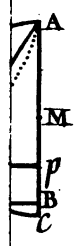
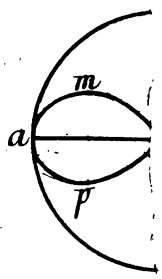


Fig. 3.

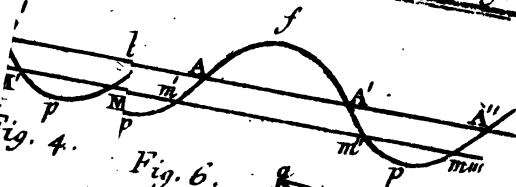


Fig. 4.



Fig. 6.

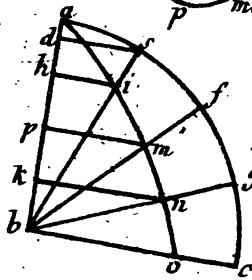


Fig. 5.

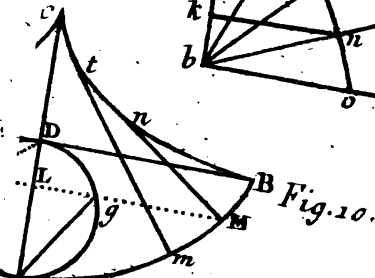


Fig. 13.

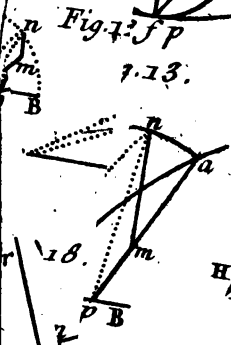


Fig. 15.

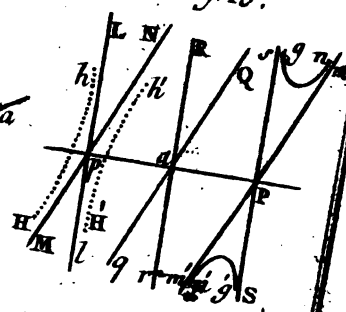


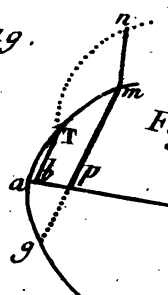
Fig. 18.



Fig. 19.



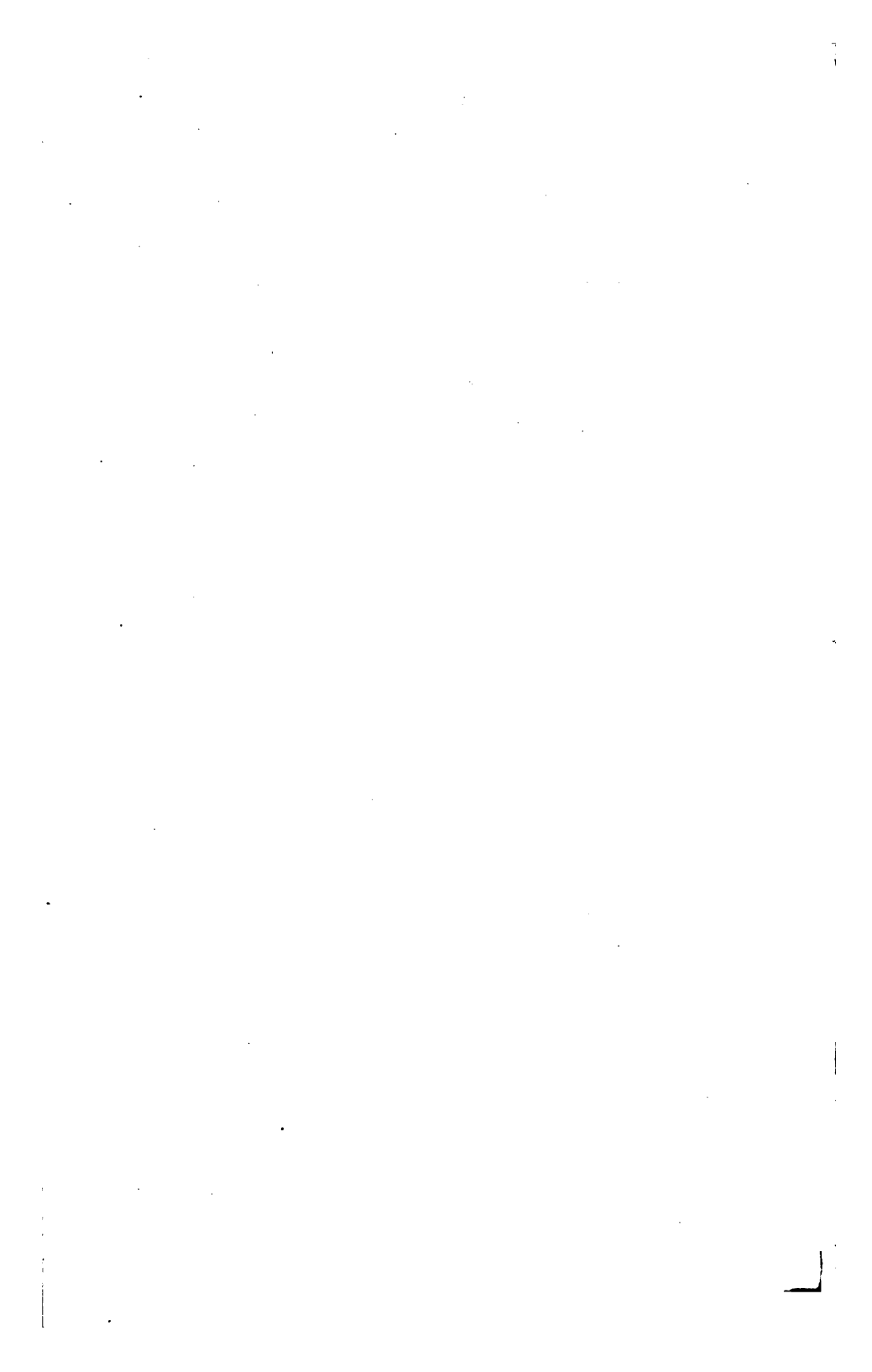
Fig. 20.



Picquet. Sculp.







UNIVERSITY OF MICHIGAN



3 9015 06531 7979